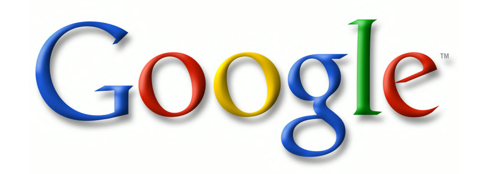
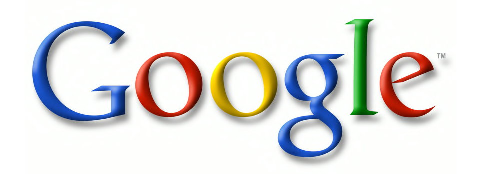

Google


Google


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE

DIE ELEMENTE

DER

NEUEREN GEOMETRIE

UND DER

ALGEBRA DER BINÄREN FORMEN.

EIN BEITRAG

ZUR

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA DER LINEAREN TRANSFORMATIONEN

VON

DR. WILHELM FIEDLER,

LEHRER AN DER HÖHEREN GEWERBESCHULE ZU CHEMNITZ.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1862.

Vorwort.

Die Arbeit, welche ich hier dem mathematischen Publikum vorlege, ist aus dem Wunsche entsprungen, zur allgemeineren Verbreitung der Kenntniss der von der „neueren Algebra“ benutzten Methoden beizutragen; über die Art und Weise, in der sie dieser Absicht zu dienen sucht, mögen hier einige Worte gesagt werden.

Sie ist durch das Verhältniss der unter dem Namen „neuere Algebra“ zusammen zu fassenden Lehren zu dem Inhalte der besseren Lehrbücher der Algebra und durch das Streben nach geometrischer Anschaulichkeit hauptsächlich bestimmt worden; sie schliesst sich an jenen Inhalt durch ihre Beschränkung auf binäre Formen und durch die Wahl ihres Ausgangspunktes von den symmetrischen Functionen so eng wie möglich an, und sie sucht diese zu erreichen durch die ausführliche Anwendung auf die Theorie der geometrischen Elementargebilde und die aus ihr entspringenden Grundlagen der Metrik. Ich hoffe, dass sie dadurch auch neben den zahlreichen der neueren Geometrie speciell gewidmeten Schriften die Beachtung der Freunde dieser Letzteren verdiene.

Die deutsche Ausgabe der „Lessons introductory to the modern higher Algebra by the Rev. George Salmon“ soll dieser Schrift rasch nachfolgen; die ausführlichere Darlegung der betreffenden Theorien für binäre Formen von dem einen Ausgangspunkte der symmetrischen Functionen erscheint geeignet, auf jene vorzubereiten, welche den ternären und quaternären Formen die vorzüglichste Aufmerksamkeit zuwenden und deshalb von weitern Grundlagen

ausgehen muss. Einige Wiederholungen, die daraus entspringen, wird man hoffentlich entschuldigen. Für die Hauptsätze der Determinantentheorie, deren Kenntniss diese Untersuchungen voraussetzen, durfte ich auf die einschlagenden speciellen Schriften, insbesondere auf Dr. Baltzer's vortreffliches Buch, um so mehr verweisen, als die „Lessons“ mit einer gedrängten Darstellung dieser Theorie beginnen und eine Wiederholung derselben ganz unnöthig erschien; dem Leser des Werkes: „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ wird vielleicht der dort gegebene Abriss dieser Theorie genügende Vorbereitung sein.

Ich hoffe, man wird die Beschränkung auf die Formen der ersten vier Grade, welche ich mir in den Beispielen zumeist auferlegt habe, und die Weglassung der mehr der Zahlenlehre angehörigen Theorie der unabhängigen Invarianten und Covarianten, sowie der Theorie der canonischen Formen in dieser Einführung billigen können.

Von der Benutzung neuerer Originalarbeiten habe ich überall treue Rechenschaft gegeben; wenn meine Arbeit etwas dazu beiträgt, einige ihrer wichtigsten Ergebnisse bekannter und dadurch wirksamer zu machen, so ist die darauf gewendete Mühe belohnt. Es sei mir erlaubt, unter ihnen besonders der „Memoirs upon Quantics“ von A. Cayley dankbar zu erwähnen, welche des verehrten Verfassers Güte mir früh zugänglich machte und aus deren Kenntniss der Plan zu dieser Schrift erwuchs.

Chemnitz, im October 1862.

Dr. Wilhelm Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

II. Ueber die Determinanten der Wurzeln und die Functionen von Sturm und Sylvester.

III. Ueber die Resultante und die gemeinschaftlichen Wurzeln von zwei Gleichungen.

IV. Elemente der Theorie der Covarianten und Invarianten binärer Formen.

III. Kapitel.

Die binären Formen des dritten und vierten Grades und die neuere Geometrie, sammt den Elementen der Theorie metrischer Relationen. 196—235

Einleitung.

Wer jetzt die Geschichte der Geometrie vom Anfang des Jahrhunderts bis zur Gegenwart darzustellen unternähme, hätte ein Bild voll Reichthum und Mannichfaltigkeit zu zeichnen; das Bild einer vielseitigen nach scheinbar ganz verschiedenen Richtungen auseinandergehenden Entwickelung, in dem sich zuletzt in der Zusammenfassung aller neugewonnenen Ergebnisse unter einheitlichen Gesichtspunkten und unter einer Idee der Abschluss oder der Anbruch einer Epoche in der Geschichte der Wissenschaft ankündigt.

Man kann sich die Schnelligkeit und den bedeutsamen Character dieser Entwickelung überraschend vergegenwärtigen, wenn man die Darstellung vergleicht, die ein Kenner und Mitforscher wie Chasles, — in dessen eigenen Arbeiten so höchst wesentliche Beiträge zu der Entwickelung gegeben waren, die es zu schildern galt, — von der Geschichte der Geometrie in der letzten Epoche gegeben hat. Wenn man mit dem reichen Inhalt des „Aperçu historique etc. (Bruxelles, 1837)“ selbst alles Das ergänzend verbindet, was bis zu jener Zeit besonders die deutsche Wissenschaft Bedeutendes geleistet, welches aus bekannten Ursachen der verdienstvolle französische Gelehrte zu verzeichnen unterlassen hat, so kann man doch bei einer Vergleichung des gegenwärtigen wissenschaftlichen Standpunktes tief einschneidende Veränderungen nicht verkennen; ja vielleicht erblickt man einen veränderten Character des Gesammtbildes.

Gewiss, dass dann dem Blicke des Betrachtenden die grossen Schöpfungen der neueren Geometrie und der Algebra der linearen Transformationen, die auch die neuere Algebra genannt werden dürfte, in ihrem scheinbaren Gegensatze als hauptsächlich characterisierende Züge in dem Bilde der Entwickelung erscheinen und dass er sie in ihrer nun sich vollziehenden Vereinigung als einen der wichtigsten Bestandtheile des Gesammtergebnisses derselben erkennen wird.

Es kann nicht meine Absicht sein, an dieser Stelle den Gang der bezeichneten Entwickelung genau zu verfolgen; man weiss zur Genüge, wie in vollkommener Unabhängigkeit von einander die Meister Chasles und Steiner den Grund zu einer neuen geometrischen Wissenschaft legten und ihren Ausbau rasch vollendeten, die man dann als „neuere Geometrie", „Géométrie supérieure" oder als „Geometrie der Lage" bezeichnet hat. Wenn sie als eine Zusammenfassung aller der in der letztvorhergehenden Zeit als bedeutsam hervorgetretenen Methoden erschien, so ward sie von ihren grossen Vertretern nicht nur zum vollständigen System der Geometrie ausgebildet, sondern es ward auch durch sie das Gebiet unserer geometrischen Kenntniss überhaupt bedeutend erweitert. Die neue Forschungsweise trat nicht nur völlig selbständig neben die ältere analytisch-geometrische Methode, sondern sie gewann ihr den Preis ab und schien sie in Schatten stellen zu sollen.

Fortan würde es, so mochte man glauben, nicht nur zwei verschiedene Wege zu geometrischen Entdeckungen geben, die analytisch-geometrische Methode des Cartesius und die Methode der neueren Geometrie, sondern es würde vielmehr diese Letztere die Entdeckungs-Methode par excellence heissen müssen. Von ihren grossen Schöpfern selbst ward Werth darauf gelegt, die neuere Geometrie frei von jeder Beziehung zur analytisch-geometrischen Methode zu begründen; sie knüpften sie, wie Chasles, an die Geometrie der Alten, an Sätze des Apollonius und Pappus, oder wie Steiner und v. Staudt an neue rein geometrische Betrachtungen; sie leiteten endlich aus den Grundvorstellungen ihrer Geometrie Coordinatensysteme ab und schienen die

analytische Geometrie als Theil derselben umfassen zu wollen.

Andererseits aber war noch vor dem Erscheinen der bezüglichen Hauptwerke aus der erweiterten analytischen Geometrie des barycentrischen Coordinatensystems in Möbius's sinnreichem Geiste die Theorie des Doppelschnittverhältnisses und der projectivischen Relationen ebenso einfach als vollständig hervorgetreten; schon hatte Plücker durch Feststellung allgemeinerer Gesichtspunkte die leichtere Handhabung und den schnelleren Fortschritt analytisch-geometrischer Entwickelungen ermöglicht; die Principien der Dualität und Reciprocität waren durch beide Forscher in ihrer vollen Allgemeinheit und wahren Bedeutung dargestellt worden.

Aber noch fehlte es der analytischen Methode an einem allgemeinen Princip zur Entdeckung geometrischer Wahrheiten, und es blieb, angesichts aller der Fortschritte, die die Geometrie durch die Analysis seit Cartesius gemacht, doch nicht unausgesprochen, dass die Synthesis ihr unentbehrlicher Wegweiser und dass es mehr nur ihre Aufgabe sei, synthetisch gefundene Resultate ihrerseits zu beweisen und zu verallgemeinern, um dabei zugleich sich selbst zu vervollkommnen.

Indess ein solches Princip ward gefunden; gefunden im Verlaufe eines Entwickelungsganges von zunächst rein algebraischen Speculationen, welche, obwohl bis auf Leibnitz zurückgehend, doch erst dann direct auf die Probleme der Geometrie anwendbar erschienen, als die Befreiung von der Enge des Cartesischen Coordinatensystems vollzogen und durch die Möbius-Plücker'schen Verhältniss-Coordinaten die Homogeneität der analytisch-geometrischen Gleichungen hergestellt war. Leibnitz hatte der Nachwelt nicht nur die Entdeckung der Differential-Rechnung, deren Ruhm man ihm so lange zu entreissen gesucht hat, sondern auch die Entdeckung der Determinanten hinterlassen, welche sechzig Jahre später durch Cramer wiedergefunden und erst durch die Arbeiten von Cauchy, Gauss und Jacobi ihrem Werthe nach umfassender gewürdigt worden ist. Sie führte auch zuletzt zu jenem Princip der analytischen Entdeckung

geometrischer Wahrheiten, welches der grosse Mann in seiner Conception von einer „Characteristica situs“ bereits geahnt haben kann. Die Entwickelung desselben knüpft sich sodann vor Allem an Gauss's berühmtes Werk: „Disquisitiones arithmeticae“.

Diess Princip hat die ganze Einfachheit eines bedeutenden wahrhaft weiter führenden Gedankens. Wenn eine Gleichung zwischen zwei, drei oder vier veränderlichen Grössen eine geometrische Form repräsentiert, so hat die analytische Geometrie die Aufgabe, aus dieser ihrer Gleichung die characteristischen Eigenschaften der Raumform an sich selbst, aus ihrer Beziehung zu anderen Gleichungen, welche andre Raumformen repräsentieren, ihren Zusammenhang mit diesen vollständig zu entwickeln. Alle diese Eigenschaften, sofern sie nicht den Zusammenhang der Form mit den festen Elementen des Coordinatensystems selbst zum Gegenstand haben, müssen von der Lage dieser festen Elemente des Coordinatensystems, auf welches die Gleichung bezogen ist, gegen die dargestellte Form unabhängig sein, ihre analytischen Repräsentanten können somit durch die algebraischen Transformationen, welche einer Veränderung des Coordinatensystems entsprechen, nicht verändert werden. Und eine Methode, welche solche analytische Ausdrücke (Invarianten und Covarianten) finden lehrt, die, von der Gleichung der betrachteten Form allein oder von ihr und von den Gleichungen anderer mit ihr in Beziehung gesetzter Formen abhängig, durch diejenigen linearen Transformationen der Veränderlichen, welche einer Coordinaten-Transformation entsprechen, nicht geändert werden, ist das allgemeine Princip zur Entdeckung geometrischer Wahrheiten auf rein analytischem Wege. Die Unveränderlichkeit solcher Functionen gegenüber der allgemeinen linearen Transformation, welche der Perspective entspricht, begründet nach demselben Princip die Entdeckung allgemeinerer Eigenschaften, welche ganzen Familien von Formen gemeinschaftlich angehören.

Die Algebra der linearen Transformationen ist die Entwickelung dieses Princips; seine Anwendung auf die Geometrie und der vollständige Ausbau der analytisch-geometrischen Formenlehre, welcher durch dasselbe gefordert ist, sind im Werke, sie beschäftigen neben den rein algebraischen und den zahlentheoretischen Consequenzen derselben Lehre die namhaftesten Geometer der Gegenwart, und es ist der nächsten Zukunft damit die Aufgabe gestellt, die errungenen Erfolge für die Förderung des mathematischen Unterrichts pädagogisch zu verwerthen. Nicht blos auf dem algebraischen und geometrischen Gebiete, sondern auch in den Theorien der Statik und Mechanik und der mathematischen Physik ist die neue Lehre berufen und geeignet, die Concentration der Ergebnisse und die Vereinfachung ihres Ausdrucks zu bewirken, sowie die mnemotechnischen Qualitäten desselben beizubringen, welche bei dem stets wachsenden Umfang des mathematischen Wissens pädagogisch so nothwendig sind.

Innerhalb dieser allgemeinen Aufgabe lässt sich die specielle, welche der gegenwärtigen Schrift gestellt ist, wie folgt bezeichnen. Es ist unbestreitbar, dass die Grundlagen der neueren Geometrie, namentlich in der rein synthetischen Gestalt, welche ihnen Steiner und v. Staudt gegeben haben, in hohem Maasse das Gepräge von Anschauungen tragen, welche aus der eigensten Natur der Sache geschöpft sind. Man muss erwarten, dass sich diess in ihrer analytischen Entwickelung durch die Leichtigkeit und Vollständigkeit offenbare, mit welcher sie sich aus den Grundbegriffen dieser letzteren ergeben. Diess nachzuweisen, ist die Aufgabe der folgenden Untersuchungen.

Die Gliederung derselben entspringt aus der Natur dieser Aufgabe. In möglichster Kürze werden zuerst die analytisch-geometrische Grundlage und die hauptsächlichsten Theorien der neueren Geometrie in ihrer analytischen Form mit dem a posteriori geführten Nachweis der Invarianten- und Covarianten-Natur der wichtigsten in denselben auftretenden Functionen gegeben. Die dabei statthafte Beschränkung auf die Formen des zweiten Grades lässt diess Verfahren zu, auch abgesehen von der aprioristischen Begründung,

die ihm auf dem Fusse folgt. Sie umfasst die Entwickelung aller einschlagenden analytischen Formen aus der Natur der Functionen selbst, die Grundlagen der Invariantentheorie angeknüpft an die Lehre von den symmetrischen Functionen der Wurzeln und Coefficienten der Gleichungen. Mit der geometrischen Interpretation der bei den linearen Formen des dritten und vierten Grades erhaltenen Ergebnisse und analytischen Betrachtungen über die Geometrie des Maasses schliesst sich sodann der Gedankengang ab.

I. Kapitel.

Die analytischen Ausdrucksformen der projectivischen Elementargebilde.

1.

Wenn man für die Lagenbestimmung räumlicher Elemente die tetraedrischen Coordinatensysteme zu Grunde legt, in denen entweder die Lage eines Punktes durch die Verhältnisse seiner Abstände von vier festen nicht durch einen Punkt gehenden Ebenen oder die Lage einer Ebene durch die Verhältnisse ihrer Abstände von vier festen nicht in einer Ebene liegenden Punkten bestimmt wird, so liefert eine homogene Function des n^{ten} Grades mit vier Veränderlichen durch ihre Gleichsetzung mit Null die Gleichung einer räumlichen Form n^{ten} Grades, einer krummen Oberfläche. Jedes bestimmte Werthsystem der Coordinaten, welches dieser Gleichung genügt, individualisiert ein Element ersten Grades von derselben, welches ein Punkt oder eine Ebene ist, jenachdem das erwähnte vierflächige System räumlicher Punkt-Coordinaten oder das vierpunktige System räumlicher Ebenen-Coordinaten der Betrachtung zu Grunde liegt; man bezeichne die ersteren durch x, y, z, w, die letzteren durch ξ, η, ζ, ω.

Alsdann wird durch

$$(a, b, c \ldots \between x, y, z, w)^n$$

ein homogenes Polynom des n^{ten} Grades in den Veränderlichen x, y, z, w und mit den der Ordnung der Polynomialentwickelung entsprechenden litteralen Coefficienten $a, b, c \ldots$ repräsentiert, überdiess vorausgesetzt, dass die Coefficienten

der Entwickelung von den Binomialzahlen der n^{ten} Potenz respective begleitet sind; während man die Abwesenheit solcher numerischen Coefficienten durch die andere Form des Ausdrucks

$$(a, b, c \ldots)(x, y, z, w)^n$$

andeutet.

In Folge dessen ist

$$(a, b, c \ldots)(x, y, z, w)^n = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche n^{ter} Ordnung, und

$$(\alpha, \beta, \gamma \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \omega)^n = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche n^{ter} Klasse.

Die Entwickelung und Discussion der Invarianten und Covarianten des homogenen Polynoms n^{ten} Grades mit vier Veränderlichen begründet oder vollendet die allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

Wenn eine der Veränderlichen des Systems sich auf Null reduciert, — welches auch den Fall einschliesst, dass sie einen constanten Werth behalte, weil dieser durch eine einfache Coordinaten-Transformation stets auf jenen zurückgeführt werden kann, — so liefern die entsprechenden homogenen Polynome n^{ten} Grades mit drei Veränderlichen

$$(a, b, c \ldots)(x, y, z)^n, \quad (\alpha, \beta, \gamma \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^n$$

die entsprechenden Theorien der algebraischen ebenen Curven n^{ter} Ordnung, der Kegelflächen n^{ten} Grades und der algebraischen Curven n^{ter} Klasse; die ersteren beiden Arten von Formen gehen aus den algebraischen Flächen hervor als Durchschnittslinien derselben mit der Fundamentalebene $w = 0$ und als Enveloppen der durch den Fundamentalpunkt $\omega = 0$ gehenden Tangentialebenen derselben; an die Stelle der letzteren unter ihnen treten alsdann die Curven n^{ter} Klasse in der Ebene der drei übrigen Fundamentalpunkte, welche von den Durchschnittslinien des Ebenensystems der Oberfläche n^{ter} Klasse mit dieser letzteren gebildet werden. Man gelangt damit zu dem Ausdruck algebraischer ebener Curven n^{ten} Grades durch dreiseitige Punktcoordinaten einerseits und durch dreipunktige Liniencoordinaten anderseits.

Das Verschwinden einer Veränderlichen mehr führt zu den analytischen Ausdrücken der geometrischen Formen, welche die neuere Geometrie als die Grundgebilde erster Stufe oder als die erzeugenden Formen zu betrachten gelehrt hat. Wenn in dem System räumlicher Punktcoordinaten zwei Veränderliche auf Null oder auf Constanten reduciert werden und ebenso, wenn das Verschwinden einer Veränderlichen in dem System ebener Punktcoordinaten statt findet, so gelangt man zu einer durch $(a, b \ldots \between x, y)^n = 0$ repräsentierten geradlinigen Punktreihe; nur mit dem auf ihre Entstehung bezüglichen Unterschiede, dass dieselbe nach der ersten Auffassung als die Reihe der Durchschnittspunkte der Oberfläche n^{ter} Ordnung mit einer Kante des Fundamentaltetraeders, nämlich mit der durch

$$z = 0, \; w = 0$$

dargestellten, nach der zweiten aber als die Reihe der Durchschnittspunkte der Seite $z = 0$ des Fundamentaldreiecks mit der Curve n^{ter} Ordnung anzusehen ist.

Durch die Einführung der analogen Voraussetzung bei der Anwendung des tetraedrischen Plancoordinatensystems erhält man zwei verschiedene Ergebnisse. Zuerst, von der allgemeinen Gleichung mit vier Veränderlichen ausgehend, das System der n Tangentialebenen, welche durch die Kante

$$\zeta = 0, \; \omega = 0$$

des Fundamentaltetraeders an die Oberfläche n^{ter} Klasse oder an den dem Punkte $\omega = 0$ entsprechenden Berührungskegel derselben gelegt werden können, also ein Ebenenbüschel. Sodann aber, ausgehend von der Klassengleichung der algebraischen Curve, erhält man durch das Verschwinden der Veränderlichen ζ das System der n Tangenten dieser Curve, welche von dem Fundamentalpunkte $\zeta = 0$ ausgehen, also ein Strahlenbüschel. Die Gleichung mit zwei Veränderlichen

$$(\alpha, \beta, \ldots \between \xi, \eta)^n = 0$$

repräsentiert also ein Ebenenbüschel oder ein ebenes Strahlenbüschel, jenachdem man sie in räumlichen Plancoordinaten oder in ebenen Liniencoordinaten interpretiert.

Man erkennt somit in der binären Form des n^{ten} Grades den analytischen Repräsentanten der geometrischen Elementargebilde oder der räumlichen Gebilde erster Stufe: der geradlinigen Punktereihe, des ebenen Strahlenbüschels und des Ebenenbüschels.

In den folgenden Entwickelungen sollen überall die Veränderlichen durch x und y bezeichnet und überdiess die Coefficienten der binären Form ohne numerische Factoren, so lange nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist, und mit unterscheidenden Ordnungsindices statt der verschiedenen Buchstaben, genommen werden, so dass

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \between x, y)^n$$

der allgemeine Repräsentant der homogenen Form n^{ten} Grades ist.

Die n Wurzeln der entsprechenden Gleichung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \between x, y)^n = 0,$$

d. h. die ihr genügenden Werthe des Verhältnisses $x : y$, sollen durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

allgemein bezeichnet werden.

Diese Wurzeln, das muss hier erinnert werden, haben eine verschiedene geometrische Bedeutung, wenn die Gleichung eine Punktreihe und wenn sie ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel repräsentiert, also wenn sich dieselbe auf ein System der Punktcoordinaten oder auf ein System der Linien- oder Plan-Coordinaten bezieht. Als die der Gleichung genügenden Werthe des Verhältnisses $x : y$ sind sie im System der Punktcoordinaten einfach Verhältnisse der Entfernungen zwischen Punkten in gerader Linie, d. i. Segmentenverhältnisse; jede Wurzel ist das Verhältniss der Entfernungen des durch sie bestimmten Punktes von den Punkten der Fundamentallinie des Coordinatensystems, in welcher die Reihe liegt, wo sie von den beiden andern Fundamentallinien geschnitten wird. Dasselbe Verhältniss ist aber in einem System der Liniencoordinaten oder in Bezug auf ein Strahlbüschel und nicht minder für ein Ebenenbüschel das Verhältniss der Sinus zweier Winkel, nämlich derjenigen für das erstere, welche der durch die Wurzel selbst bestimmte Strahl des Büschels mit denjenigen beiden festen

Strahlen bildet, die den im Scheitel des Letzteren liegenden Fundamentalpunkt des Coordinatensystems mit den beiden andern Fundamentalpunkten desselben verbinden; derjenigen sodann für das zweite, welche die der betrachteten Wurzel entsprechende Ebene mit den beiden festen Ebenen einschliesst, die durch die Scheitelkante des Büschels, die Verbindungslinie zweier Fundamentalpunkte des Coordinatensystems, mit den beiden übrigen Fundamentalpunkten desselben bestimmt sind. In der Zulässigkeit dieser doppelten Interpretation für dieselbe algebraische Form liegt die analytische Begründung des Princips der Dualität, welches zu den schönsten Ergebnissen der neueren Forschung gehört.

2.

Wenn das Vorige die Erwartung begründet, dass die Theorien der neueren Geometrie aus der Algebra binärer Formen hervorgehen müssen, so erfüllt sich diese Erwartung schon innerhalb der Theorie der binären quadratischen Formen auf fast vollständige Weise. Die Relationen der harmonischen Theilung, des Doppelschnittverhältnisses und der Involution entspringen aus ihr leicht und vollständig,*) sammt den darauf gegründeten Theorien.

Eine quadratische Form

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 \quad \text{oder} \quad (a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2$$

repräsentiert, gleich Null gesetzt, ein Punktepaar, wenn sie in Punktcoordinaten, ein Paar von geraden Linien oder ein zweistrahliges Büschel, wenn sie in ebenen Liniencoordinaten, und ein Paar von Ebenen, wenn sie in räumlichen Plancoordinaten interpretiert wird; diese Punkte, Linien oder Ebenen sind reell oder imaginär, jenachdem sich aus der Gleichung

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 = 0$$

reelle oder imaginäre Werthe für das als Unbekannte zu betrachtende Verhältniss $x : y$ ergeben; immer aber ist die gerade Linie, welche die Punkte verbindet, oder die, in welcher die beiden Ebenen sich schneiden, und der gemeinschaft-

*) Man vergl. das Werk: „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ von George Salmon. Leipzig, Teubner. 1860. Art. 422—24.

liche Punkt der beiden Strahlen reell, als dem Werthepaar $x = 0$, $y = 0$ entsprechend.

Eine solche binäre quadratische Form besitzt nur eine einzige Invariante; die man auch ihre Discriminante nennt; es ist die Grösse

$$D = 4a_0a_2 - a_1^2.$$

Sie ist eine Invariante, denn wenn man die ursprüngliche Form durch die lineare Transformation umformt, bei welcher

$$\beta X + \gamma Y \text{ und } \beta' X + \gamma' Y$$

respective an die Stelle von x und y treten, also in

$$a_0 (\beta X + \gamma Y)^2 + a_1 (\beta X + \gamma Y)(\beta' X + \gamma' Y) + a_2 (\beta' X + \gamma' Y)^2 \text{ oder}$$

$$(a_0\beta^2 + a_1\beta\beta' + a_2\beta'^2) X^2 + [2(a_0\beta\gamma + a_2\beta'\gamma') + a_1(\beta\gamma' + \beta'\gamma)] XY$$
$$+ (a_0\gamma^2 + a_1\gamma\gamma' + a_2\gamma'^2) Y^2$$

d. i. abkürzend $\quad A_0X^2 + A_1XY + A_2Y^2,$

so findet man

$$4A_0A_2 - A_1^2 = 4(a_0\beta^2 + a_1\beta\beta' + a_2\beta'^2)(a_0\gamma^2 + a_1\gamma\gamma' + a_2\gamma'^2)$$
$$-[2(a_0\beta\gamma + a_2\beta'\gamma') + a_1(\beta\gamma' + \beta'\gamma)]^2 = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2(4a_0a_2 - a_1^2).$$

Der Factor $(\beta\gamma' - \beta'\gamma)$, dessen Quadrat hier auftritt, heisst die Determinante der Substitution und durch die bewiesene Relation ist also der Character der Invarianz erhärtet;*) man kann eben dieses Quadrat stets der positiven Einheit gleichsetzen. Man mag auch erwähnen, dass diese Invariante gefunden wird, indem man die Elimination der Veränderlichen aus den partiellen Differentialen der Gleichung nach denselben vollzieht.

Die Bedeutung der Relation

$$4a_0a_2 - a_1^2 = 0$$

ist aus der Theorie der Gleichungen wohl bekannt, als die Bedingung der Gleichheit der Wurzeln.**) Wenn sie erfüllt ist, so repräsentiert die Gleichung

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$$

zwei zusammenfallende Punkte, Strahlen oder Ebenen.

Die Wurzeln dieser Gleichung α_1, α_2 hängen durch die Relation

$$D = -\frac{a_0^2}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

mit dieser Discriminante D zusammen, worin sich die Bedeutung derselben wiederholt ausspricht.

---

*) Vergl. Art. 17.

**) Vergl. Art. 17.

Zwei quadratische Formen

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 \text{ und } (a'_0, a'_1, a'_2 \between x, y)^2$$

repräsentieren, gleich Null gesetzt und auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, zwei Punktepaare in derselben geraden Linie, oder zwei durch denselben Punkt gehende Strahlenpaare in einerlei Ebene oder zwei Paare von Ebenen mit derselben gemeinschaftlichen Schnittlinie.

Sie geben zweien Discriminanten den Ursprung,

$$D = 4a_0a_2 - a_1^2, \quad D' = 4a_0'a_2' - a_1'^2,$$

welche, einzeln gleich Null gesetzt, das Zusammenfallen der Punkte, Linien oder Ebenen desselben Paares anzeigen.

Man erhält ferner eine in den Coefficienten beider Formen lineare gemeinschaftliche Invariante*)

$$\mathrm{I}_{2,1}^{(2)} = 2a_0a_2' - a_1a_1' + 2a_0'a_2,$$

für welche es hier gleichfalls genügen mag, den Invarianten-Character a posteriori durch den Vollzug der Substitution

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

zu beweisen. Man hat nach wieder hergestellter Ordnung die transformierten Formen

$$(a_0\beta^2 + a_1\beta\beta' + a_2\beta'^2) X^2 + [2a_0\beta\gamma + a_1(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + 2a_2\beta'\gamma'] XY + (a_0\gamma^2 + a_1\gamma\gamma' + a_2\gamma'^2) Y^2,$$

$$(a_0'\beta^2 + a_1'\beta\beta' + a_2'\beta'^2) X^2 + [2a_0'\beta\gamma + a_1'(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + 2a_2'\beta'\gamma'] XY + (a_0'\gamma^2 + a_1'\gamma\gamma' + a_2'\gamma'^2) Y^2,$$

und erhält, wenn man dieselben durch

$$A_0X^2 + A_1XY + A_2Y^2, \quad A_0'X^2 + A_1'XY + A_2'Y^2$$

respective darstellt, die Identität

$$(2a_0a_2' - a_1a_1' + 2a_0'a_2)(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 = 2A_0A_2' - A_1A_1' + 2A_0'A_2.$$

In Folge dessen muss die Relation

$$2a_0a_2' - a_1a_1' + 2a_0'a_2 = 0$$

eine vom Coordinatensystem unabhängige Beziehung der beiden Paare von Punkten, Strahlen oder Ebenen ausdrücken; es ist die harmonische Relation, die beiden Paare von Elementen bilden ein harmonisches System und die Elemente desselben Paares sind einander conjugiert.

---

*) Vergl. Art. 18.

Sind nämlich α_1, α_2 die Wurzeln der ersten, α_1', α_2' die der zweiten Gleichung, so kann man einerseits aus der gefundenen Invariante selbst bekannte Ausdrucksformen der harmonischen Relation durch ein System von Identitäten ableiten, welches sogleich angegeben werden soll; und man kann anderseits von dem Doppelschnittsverhältniss der vier Punkte aus zu demselben Resultate kommen. Jene Invariante liefert, in den Wurzeln der quadratischen Gleichungen ausgedrückt, den Werth

$$\frac{a_0 a_0'}{2}\left\{2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1'\alpha_2')-(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1'+\alpha_2')\right\};$$

daran aber schliessen sich die leicht zu verificierenden Identitäten

$$\begin{aligned}2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1'\alpha_2')&-(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1'+\alpha_2')\\ &=2(\alpha_1-\alpha_1')(\alpha_1-\alpha_2')-(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_1-\alpha_1'-\alpha_2')\\ &=2(\alpha_2-\alpha_1')(\alpha_2-\alpha_2')-(\alpha_2-\alpha_1)(2\alpha_2-\alpha_1'-\alpha_2')\\ &=2(\alpha_1'-\alpha_1)(\alpha_1'-\alpha_2)-(\alpha_1'-\alpha_2')(2\alpha_1'-\alpha_1-\alpha_2)\\ &=2(\alpha_2'-\alpha_1)(\alpha_2'-\alpha_2)-(\alpha_2'-\alpha_1')(2\alpha_2'-\alpha_1-\alpha_2);\end{aligned}$$

so dass man die Gleichheit der gedachten Invariante mit Null in den vier äquivalenten Formen ausdrücken kann

$$\frac{2}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_1'}+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2'},$$
$$\frac{2}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1'}+\frac{1}{\alpha_2-\alpha_2'},$$
$$\frac{2}{\alpha_1'-\alpha_2'}=\frac{1}{\alpha_1'-\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_1'-\alpha_2},$$
$$\frac{2}{\alpha_2'-\alpha_1'}=\frac{1}{\alpha_2'-\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2'-\alpha_2}.$$

Sie sind bekannte Formen der harmonischen Relation*) und sagen aus, dass der inverse Werth der Entfernung eines Punktes der harmonischen Theilung von dem ihm conjugierten der halben Summe der inversen Werthe seiner Entfernungen von den beiden andern Punkten gleich ist. Man sieht, dass das identische Verschwinden der Invariante der beiden quadratischen Formen die harmonische Relation der Wurzeln derselben zur directen Folge hat.

---

*) Vergl. Chasles, Géométrie supérieure Art. 61, Gl. 3, etc.

Anderseits aber ist das Doppelschnittverhältniss der durch beide Gleichungen repräsentierten vier Elemente

$$m = \frac{\alpha_1' - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2'} : \frac{\alpha_1' - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_2'};$$

wenn man nun die Ausdrücke für $(1 + m)$ und $(1 - m)$ bildet, so liefert die Division derselben die Relation

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2') - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1' \alpha_2')}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1' - \alpha_2')} = \frac{1 + m}{1 - m},$$

welche nach den bereits benutzten Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der quadratischen Gleichungen in

$$\frac{[2(a_0 a_2' + a_0' a_2) - a_1 a_1']^2}{4(a_1^2 - 4 a_0 a_2)(a_1'^2 - 4 a_0' a_2')} = \left(\frac{1 + m}{1 - m}\right)^2$$

übergeht.

Man sieht daraus, dass für

$$m = + 1$$

eine der als Factoren im Nenner auftretenden Discriminanten verschwindet, dass also das eine Paar von Elementen des bezüglichen harmonischen Systems von zwei zusammenfallenden Elementen gebildet wird, wie es bekanntlich nach der Natur des Doppelschnittverhältnisses sein muss; man sieht auch, dass für

$$m = - 1$$

oder für die harmonische Theilung die vorerwähnte Invariante den Werth Null haben muss. Es ergiebt sich aber überdiess für $m = 0$ die Relation

$$4(a_1^2 - 4 a_0 a_2)(a_1'^2 - 4 a_0' a_2') = [2(a_0 a_2' + a_0' a_2) - a_1 a_1']^2.$$

Da das Doppelschnittverhältniss von vier Elementen nur dann den Werth Null haben kann, wenn eines der theilenden mit dem einen der die Strecke begrenzenden Elemente zusammenfällt, so zeigt diese Relation die Existenz einer für beide Gleichungen gemeinschaftlichen Wurzel an; und da unter der Voraussetzung einer solchen die Identität des durch die Elimination der Veränderlichen aus beiden Gleichungen erhaltenen Resultats mit Null besteht, so hat man in dem Ausdruck

$$4(a_1^2 - 4 a_0 a_2)(a_1'^2 - 4 a_0' a_2') - [2(a_0 a_2' + a_0' a_2) - a_1 a_1']^2$$

eben diess Eliminationsresultat oder die Resultante beider Gleichungen.

Man kann dieselbe überdiess leicht in der Form

$$(a_0 a_2' - a_0' a_2)^2 - (a_0 a_1' - a_0' a_1)(a_1 a_2' - a_1' a_2)$$

erhalten,*) in welcher sie als die Discriminante einer quadratischen Form

$$((a_0 a_1' - a_0' a_1),\ 2(a_0 a_2' - a_0' a_2),\ (a_1 a_2' - a_1' a_2)\between x, y)^2$$

erkannt wird, deren Bedeutung sogleich erhellen soll; eben diess gäbe nach dem Vorigen an dieser Stelle die bequemste Gewähr ihres Invarianten-Characters, wenn derselbe in dem Begriffe der Resultante selbst nicht schon deutlich ausgesprochen wäre. Sie tritt zu der linearen Invariante der harmonischen Theilung als **die in den Coefficienten der Formen quadratische Invariante** derselben hinzu.

Man kann sie nach den von **Euler, Bézout** und **Sylvester** angegebenen Eliminationsmethoden**) in Determinanten-Form darstellen, wie folgt:

$$R = \begin{vmatrix} 0, & a_0, & a_1, & a_2 \\ a_0, & a_1, & a_2, & 0 \\ 0, & a_0', & a_1', & a_2' \\ a_0', & a_1', & a_2', & 0 \end{vmatrix},$$

und kann endlich aus ihrem Ausdruck in Gliedern der Wurzeln beider Gleichungen die vorher bezeichnete Bedeutung wieder erkennen; als die Differenz von dem Quadrat der linearen Invarianten und dem vierfachen Product der Discriminanten beider Gleichungen ergiebt sie sich mittelst der Relationen

$$D = -\frac{a_0^2}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2,\quad D' = -\frac{a_0'^2}{4}(\alpha_1' - \alpha_2')^2,$$

$$\mathrm{I}_{2,1}^{(2)} = \frac{a_0 a_0'}{2}\left\{2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1'\alpha_2') - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2')\right\}$$

in der Form

$$\frac{a_0^2 a_0'^2}{4}\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1' - \alpha_2')^2 - [2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1'\alpha_2') - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2')]^2\right\};$$

d. h. mit Vernachlässigung des Factors $\frac{a_0^2 a_0'^2}{4}$

$$R = (\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_1 - \alpha_2')(\alpha_2 - \alpha_1')(\alpha_2 - \alpha_2').$$

---

*) Vergl. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte etc." Art. 342.

**) a. a. O. Art. 342—44. Vergl. unten Art. 13, 14.

Sie wird zur Null, wenn beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Die quadratische Form

$$((a_0 a_1' - a_0' a_1),\ 2(a_0 a_2' - a_0' a_2),\ (a_1 a_2' - a_1' a_2)\between x, y)^2,$$

als deren Discriminante die Resultante beider Formen so eben bezeichnet worden ist, bietet die natürliche Anknüpfung, um nach der Betrachtung der Invarianten nun von den Covarianten der quadratischen Form zu sprechen. Denn sie ist eine Covariante beider gegebenen Formen, d. h. eine solche Function der Coefficienten und Veränderlichen derselben, welche durch eine lineare Substitution nicht anders als durch Hinzutreten eines der Substitutions-Determinante gleichen Factors verändert wird.

Man bezeichnet dieselbe als die Jacobi'sche Functional-Determinante der beiden Formen und bildet sie aus den partiellen Differentialen derselben nach den beiden Veränderlichen, wie folgt. Wenn durch die Symbole S und S' die beiden quadratischen Formen

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2,\ (a_0', a_1', a_2' \between x, y)^2$$

respective bezeichnet werden, so ist die Functional-Determinante derselben

$$= \begin{vmatrix} \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy} \\ \frac{dS'}{dx}, & \frac{dS'}{dy} \end{vmatrix}.$$

An diese Bildung knüpft sich der Nachweis ihres Covarianten-Characters auf das Leichteste an. Die lineare Substitution

$$x = \beta X + \gamma Y,\ y = \beta' X + \gamma' Y$$

führt die partiellen Differentiale in die neuen

$$\beta \frac{dS}{dX} + \beta' \frac{dS}{dY},\quad \gamma \frac{dS}{dX} + \gamma' \frac{dS}{dY} \text{ etc.}$$

über und es tritt daher in der analog gebildeten neuen Determinante nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten nur die Determinante der Substitution

$$\begin{vmatrix} \beta, & \gamma \\ \beta', & \gamma' \end{vmatrix}$$

zur alten als ein Factor hinzu.

Die wirkliche Ausführung der Differentiationen liefert

$$\frac{dS}{dx} = 2a_0x + a_1y,\ \frac{dS}{dy} = 2a_2y + a_1x,$$

$$\frac{dS'}{dx} = 2a_0'x + a_1'y,\ \frac{dS'}{dy} = 2a_2'y + a_1'x,$$

so dass der Werth der entwickelten Determinante gefunden wird wie oben

$$(a_0a_1'—a_0'a_1)\,x^2 + 2\,(a_0a_2'—a_0'a_2)\,xy + (a_1a_2'—a_1'a_2)\,y^2.$$

Man kann ihr endlich die Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x^2, & -2xy, & y^2 \\ a_2, & a_1, & a_0 \\ a_2', & a_1', & a_0' \end{vmatrix}$$

geben, welche mit dem Vorigen identisch ist.

Ihre geometrische Bedeutung liegt in ihrer Natur als Covariante der betrachteten quadratischen Formen ausgesprochen; sie repräsentiert, gleich Null gesetzt, ein Paar von Elementen, welches in einer vom Coordinatensystem unabhängigen unveränderlichen Beziehung zu den durch die quadratischen Formen selbst bestimmten Elementen ist. Die Natur dieser Beziehung bleibt zu entwickeln. Sie ergiebt sich aus der Betrachtung der linearen Invariante zweier binären quadratischen Formen. Dieselbe zeigt sofort, dass die beiden von der Covariante repräsentierten Elemente mit jedem der Elementenpaare der gegebenen Formen selbst in harmonischer Relation sind; denn die Zusammenstellnng der entsprechenden Coefficienten der drei Formen

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2;$$
$$a_0',\quad a_1',\quad a_2';$$
$$(a_0a_1'—a_0'a_1),\ 2(a_0a_2'—a_0'a_2),\ (a_1a_2'—a_1'a_2)$$

liefert die der harmonischen linearen Invariante entsprechenden Identitäten

$$2a_0\,(a_1a_2'—a_1'a_2) - 2a_1\,(a_0a_2'—a_0'a_2) + 2a_2\,(a_0a_1'—a_0'a_1) = 0,$$

$$2a_0'\,(a_1a_2'—a_1'a_2) — 2a_1'\,(a_0a_2'—a_0'a_2) + 2a_2'\,(a_0a_1'—a_0'a_1) = 0.$$

Demnach bezeichnet die Covariante der beiden quadratischen Formen die Doppelpunkte oder Brennpunkte des involutorischen Systems, wel-

ches von den zwei durch diese selbst dargestellten Paaren von Elementen bestimmt ist.*)

Man erhält diese Covariante in Gliedern der Wurzeln beider Formen, indem man in ihrem Ausdrucke in den Coefficienten mit dem Factor $a_0 a_0'$ dividiert, also

$$\left(\frac{a_1'}{a_0'}-\frac{a_1}{a_0}\right)x^2+2\left(\frac{a_2'}{a_0'}-\frac{a_2}{a_0}\right)xy+\left(\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2'}{a_0'}-\frac{a_1'}{a_0'}\frac{a_2}{a_0}\right)y^2,$$

nach den bekannten Relationen in der Form

$$[(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1'+\alpha_2')]\,x^2+2\,(\alpha_1'\alpha_2'-\alpha_1\alpha_2)\,xy$$
$$+\,[(\alpha_1+\alpha_2)\,\alpha_1'\alpha_2'-(\alpha_1'+\alpha_2')\,\alpha_1\alpha_2]\,y^2.$$

Man findet ebenso durch Einführung in die oben gegebene Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x^2, & 2xy, & y^2 \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1+\alpha_2, & 1 \\ \alpha_1'\alpha_2', & \alpha_1'+\alpha_2', & 1 \end{vmatrix},$$

ebenfalls mit Hinweglassung des Factors $a_0 a_0'$ gegen die ursprüngliche Form.

Wenn die beiden quadratischen Gleichungen eine gemeinsame Wurzel besitzen

$$\alpha_1=\alpha_1',$$

so wird die lineare Invariante der harmonischen Relation in Gliedern der Wurzeln auf das Product

$$\frac{a_0 a_0'}{2}\,(\alpha_1-\alpha_2')\,(\alpha_1-\alpha_2)$$

reduciert, die Resultante wird Null und der Werth der Covariante der Doppelpunkte ist

$$a_0 a_0'\,(\alpha_2'-\alpha_2)\,(x-\alpha_1 y)^2.$$

Dieselbe ist somit ein vollkommenes Quadrat und repräsentiert zwei zusammenfallende, mit denen, die der gemeinschaftlichen Wurzel entsprechen, überdiess identische Elemente. Es ist die analytische Parallele zu der geometrischen Wahrheit, dass die gemeinschaftlichen harmonischen Theilpunkte**) von zwei Segmenten, die

*) Vergl. Chasles, „Géom. supér." Art. 205.

**) Hier und überall im Folgenden, wo von Punkten und Segmenten speciell die Rede ist, stehen dieselben nur als Stellvertreter der Elemente der Gebilde erster Stufe und können durch Strahlen eines ebenen Büschels oder durch Ebenen eines Büschels ersetzt werden. Die Auslassung erscheint nach dem Vorigen erlaubt und im Interesse der Kürze geboten.

einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, eben nur mit diesem gemeinschaftlichen Endpunkte selbst zusammenfallend existieren.

Die Form der harmonischen Invariante für den Fall einer gemeinsamen Wurzel lehrt überdiess, dass sie nur dann mit Null identisch werden, d. h. dass unter dieser Voraussetzung die harmonische Beziehung nur dann stattfinden kann, wenn man ausser

$\alpha_1 = \alpha_1'$, noch hat entweder $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 = \alpha_2'$,

d. h. wenn die eine quadratische Form Elemente darstellt, die mit einem der von der anderen repräsentierten Elemente zusammenfallen. Darnach ist jeder Endpunkt eines Segments als die Vereinigung zweier zusammenfallender harmonischer Theilpunkte desselben anzusehen.

Man sieht, wie schon aus der Betrachtung von nur zwei quadratischen Formen die Theorie der harmonischen Theilung und des Doppelschnittverhältnisses, sowie einer der wesentlichsten Bestandtheile der Theorie der Involution hervorgehen; man könnte diese Ergebnisse leicht vervollständigen, z. B. die Existenz des Centralpunktes und seine Beziehungen zu den gegebenen Punktepaaren aus dem Vorigen erweisen, indem man an den Ausdruck der Doppelpunkt-Covariante in Gliedern der Wurzeln

$$[(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1'+\alpha_2')]\,x^2+2(\alpha_1'\alpha_2'-\alpha_1\alpha_2)\,xy$$
$$+[(\alpha_1+\alpha_2)\,\alpha_1'\alpha_2'-(\alpha_1'+\alpha_2')\,\alpha_1\alpha_2]\,y^2=0$$

die Bemerkung knüpft, dass dem in der Mitte zwischen beiden Doppelpunkten gewählten Coordinatenanfang, d. i. der numerischen Gleichheit der beiden Wurzeln dieser Gleichung bei entgegengesetztem Vorzeichen, die Relation

$$\alpha_1'\alpha_2' - \alpha_1\alpha_2 = 0$$

entspricht; als der analytische Ausdruck der bekannten Eigenschaft des Centrums der Involution, wornach das Rechteck der Entfernungen der Endpunkte der involutorischen Segmente von diesem Centrum einen constanten Werth hat.*)

Anderseits kann man leicht zeigen, dass dieser Centralpunkt selbst der angebbare Endpunkt desjenigen unter

*) Vergl. Chasles, „Géom. supér." Art. 197.

den die Involution bildenden Segmenten ist, welches den unendlich entfernten Punkt der geraden Linie, in der sie liegen, zum anderen Endpunkt hat. Aber der natürliche Platz der Theorie der Involution ist bei der gleichzeitigen Betrachtung von drei quadratischen Formen, als welche erst der bekannten Bezeichnungsweise als Involution von sechs Punkten entspricht; auch die allgemeine Bedeutung des Doppelschnittverhältnisses kann dann erst hervortreten.

3.

Die drei binären quadratischen Formen

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2,$$
$$(a_0', a_1', a_2' \between x, y)^2,$$
$$(a_0'', a_1'', a_2'' \between x, y)^2$$

haben eine gemeinschaftliche Invariante, die man in der Form

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_0', & a_1', & a_2' \\ a_0'', & a_1'', & a_2'' \end{vmatrix}$$

am einfachsten durch eine lineare Substitution und nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten als eine solche erkennt.

Wenn man sie durch $\mathrm{I}_{2,1}^{(3)}$ und die drei quadratischen Formen durch S, S', S'' bezeichnet, so ist

$$\mathrm{I}_{2,1}^{(3)} = 0$$

die Bedingung, unter welcher die drei quadratischen Formen durch eine lineare Relation

$$\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$$

mit den Constanten λ, μ, ν unter einander verbunden sind, unter welcher also aus zweien von ihnen die dritte hervorgeht; denn alsdann müssen die Grössen x^2, xy, y^2 sich linear zwischen den drei Gleichungen eliminieren lassen.*)

Eben auf diese gegenseitige Beziehung aber geht der Ausdruck der Involution. Die angegebene Determinante ist daher auch identisch mit der im §. VI des von der Involution handelnden Kapitels der „Géom. supér.", Art. 218, auf-

*) Hier und im Folgenden verdanke ich das Wesentlichste Cayley's „Fifth Memoir upon Quantics" Philos. Trans. Vol. 148, p. 434.

gestellten Grundgleichung α) für die Involution von sechs Punkten; dieselbe weicht nur durch die statthafte Voraussetzung $a_0 = a_0' = a_0''$ von dieser Determinante ab.

Dass aber die in dieser Letzteren ausgesprochene Relation die involutorische ist, lässt sich hier am einfachsten im Anschluss an das Vorige erkennen, und es genügt dazu die Ueberführung der aus den Coefficienten der Gleichungen gebildeten Determinante in eine aus den Wurzeln gebildete.

Für die Wurzelpaare $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1', \alpha_2'; \alpha_1'', \alpha_2''$ erhält man

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 \alpha_2 \\ 1, & \alpha_1' + \alpha_2', & \alpha_1' \alpha_2' \\ 1, & \alpha_1'' + \alpha_2'', & \alpha_1'' \alpha_2'' \end{vmatrix}$$

und wird dadurch sofort an die analoge Ausdrucksform der im vorigen Artikel mit untersuchten Covariante

$$\begin{vmatrix} y^2, & 2xy, & x^2 \\ 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 \alpha_2 \\ 1, & \alpha_1' + \alpha_2', & \alpha_1' \alpha_2' \end{vmatrix}$$

erinnert, welche speciell das Paar der Doppelpunkte als das dritte der involutorischen Punktepaare betrifft. Insofern sie die Doppelpunkte der Involution sind, müssen sie der Bildung der soeben betrachteten Involutions-Relation für

$$\alpha_1'' = \alpha_2'' = \alpha$$

entsprechen, so dass man hat

$$\begin{vmatrix} 1, & 2\alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 \alpha_2 \\ 1, & \alpha_1' + \alpha_2', & \alpha_1' \alpha_2' \end{vmatrix} = 0;$$

eine Relation, welche dem entspricht, was man die Involution von fünf Punkten zu nennen pflegt.*) Wenn man in derselben die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2'$ als gegeben betrachtet, so liefert sie eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von α und die aus ihr erhaltenen Werthe dieser Grösse α', α'' sind genau nichts Anderes als die Wurzeln der aus

*) Man findet z. B. die erste der Relationen d) des Art. 192 der „Géom. supér.",

$$\frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'} = \frac{\overline{ae}^2}{\overline{a'e}^2},$$

wenn man die den Wurzelpaaren $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1', \alpha_2'$ respective entsprechenden Punkte durch $a, b; a', b'$ und den der Wurzel α entsprechenden Doppelpunkt durch e bezeichnet.

jener Covariante durch Vergleichung mit Null gebildeten Gleichung, da man dieselbe in der Form

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{2x}{y}, & \frac{x^2}{y^2} \\ 1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1'\alpha_2' \end{vmatrix} = 0$$

schreiben kann.

Da diese Punkte α dem Zusammenfallen solcher Punktepaare entsprechen, wie sie in die Involution eintreten, so werden sie als die sich selbst conjugierten Punkte des Systems bezeichnet, insofern man die Punkte jedes der Involution angehörigen Paares als einander conjugiert benennt.

Es ist nicht schwer, ihre Existenz und den eben bezeichneten analytischen Ausdruck dieser Punkte aus der Natur der involutorischen Relation

$$\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$$

abzuleiten. Dem Begriff der Doppelpunkte, d. i. der Existenz gleicher Wurzeln in der Gleichung

$$S'' = 0$$

entspricht die Forderung, die Constanten λ, μ so zu bestimmen, dass

$$\lambda S + \mu S'$$

ein vollkommenes Quadrat werde, nämlich

$$= a_0'' (x - \alpha y)^2.$$

Damit aber

$$\lambda S + \mu S', \text{ d. i.}$$

$$(a_0\lambda + a_0'\mu) x^2 + (a_1\lambda + a_1'\mu) xy + (a_2\lambda + a_2'\mu) y^2$$

ein vollkommenes Quadrat werde, muss man haben

$$(a_1\lambda + a_1'\mu)^2 = 4(a_2\lambda + a_2'\mu)(a_0\lambda + a_0'\mu)$$

oder

$$(a_0a_2 - a_1^2)\lambda^2 + (4a_0a_2' + 4a_0'a_2 - 2a_1a_1')\lambda\mu + (a_0'a_2' - a_1'^2)\mu^2 = 0.$$

Nun fliesst aus

$$\lambda S + \mu S' = o = a_0'' (x - \alpha y)^2$$

$$\lambda : \mu = S' : -S,$$

so dass man für die vorige Relation schreiben kann

$$S'^2(a_0a_2 - a_1^2) - 2S'S(2a_0a_2' + 2a_0'a_2 - a_1a_1') + S^2(a_0'a_2' - a_1'^2) = 0,$$

in welcher nach denselben Voraussetzungen der Ausdruck der linken Seite bis auf einen Factor

$$= (x - \alpha' y)^2 (x - \alpha'' y)^2$$

sein muss. Man erhält aber anderseits bei Einführung der Werthe von S und S' durch Entwickelung aus dem vorigen Ausdruck den neuen

$$-[(a_0 a_1' - a_0' a_1) x^2 + 2 (a_0 a_2' - a_0' a_2) xy + (a_1 a_2' - a_1' a_2) y^2]^2,$$

das Quadrat der Covariante, und erkennt damit von ganz anderen Grundlagen aus die den Doppelpunkten entsprechenden Grössen

$$x - \alpha' y, \quad x - \alpha'' y$$

als Factoren der Covariante. Damit sind die Entwickelungen des vorigen Artikels mit denen des jetzigen in die directeste Verbindung gesetzt.

Zugleich spiegelt sich in dem Gange dieser Entwickelung die harmonische Beziehung der Doppelpunkte auf die durch

$$S = 0, \quad S' = 0$$

repräsentierten beiden Punktepaare. Wenn die den Wurzeln α_1, α_2; α_1', α_2' entsprechenden Punktepaare gegeben und die Doppelpunkte oder die sich selbst conjugierten Punkte, als welche den Wurzeln α', α'' entsprechen, bestimmt sind, so bildet ein jedes Paar von Punkten — es kann als den Wurzeln α_1'', α_2'' entsprechend gedacht werden — welches auf das Paar der Doppelpunkte harmonisch bezogen ist, mit den beiden ersten Punktepaaren eine Involution.

Die Auffassung der Doppelpunkte als der sich selbst conjugierten Punkte der Involution gestattet, sie als zwei Punktepaare

$$\alpha', \alpha'; \ \alpha'', \alpha''$$

zu betrachten, welche mit dem dritten Paare α_1'', α_2'' eine Involution bilden. Die involutorische Relation für diesen speciellen Fall muss sich aber nach dem Früheren auf die harmonische Relation der Punktepaare α_1'', α_2''; α', α'' reducieren.

Und in der That ist zur vollen Bestätigung dieser Zusammenhänge

$$\begin{vmatrix} 1, & 2\alpha' , & \alpha'^2 \\ 1, & 2\alpha'' , & \alpha''^2 \\ 1, & \alpha_1'' + \alpha_2'', & \alpha_1''\alpha_2'' \end{vmatrix} = 0 \text{ mit}$$

$$(\alpha' - \alpha'') [2 (\alpha_1''\alpha_2'' + \alpha'\alpha'') - (\alpha_1'' + \alpha_2'') (\alpha' + \alpha'')] = 0$$

identisch.

Die Theorie des Doppelschnittverhältnisses gewinnt ihre wichtige Bedeutung für die Geometrie vor Allem durch die Vergleichung zwischen den Doppelschnittverhältnissen verschiedener Reihen von Elementen; aus dieser entspringt die Theorie der homographischen Reihen und Büschel oder die Theorie der projectivischen Elementargebilde. Auch diese Theorie ist der Analysis leicht zugänglich und fällt demselben Formengebiete anheim, in dem das Vorhergehende sich bewegt hat. Denn bezeichnet man wie vorher durch die Werthe der Wurzeln quadratischer Gleichungen die Punktepaare, welche durch diese selbst repräsentiert sind, so sind α_1, α_2; α_1', α_2'; α_1'', α_2''; α_1''', α_2''' vier Punktepaare, welche, in die beiden Gruppen

$$\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''; \quad \alpha_2, \alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2'''$$

vertheilt, einer Doppelschnittverhältnissgleichheit den Ursprung geben, wenn man hat

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_1'\alpha_2' \\ 1, & \alpha_1'', & \alpha_2'', & \alpha_1''\alpha_2'' \\ 1, & \alpha_1''', & \alpha_2''', & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0.$$

Die abkürzenden Bezeichnungen

$$A_1 = (\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_1 - \alpha_1'''), \quad A_2 = (\alpha_2' - \alpha_2'')(\alpha_2 - \alpha_2'''),$$
$$B_1 = (\alpha_1'' - \alpha_1)(\alpha_1' - \alpha_1'''), \quad B_2 = (\alpha_2'' - \alpha_2)(\alpha_2' - \alpha_2'''),$$
$$C_1 = (\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_1'' - \alpha_1'''), \quad C_2 = (\alpha_2 - \alpha_2')(\alpha_2'' - \alpha_2'''),$$

welche die Relationen

$$A_1 + B_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + B_2 + C_2 = 0,$$

$$B_1C_2 - B_2C_1 = C_1A_2 - C_2A_1 = A_1B_2 - A_2B_1 = \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_1'\alpha_2' \\ 1, & \alpha_1'', & \alpha_2'', & \alpha_1''\alpha_2'' \\ 1, & \alpha_1''', & \alpha_2''', & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix}$$

begründen, machen sichtbar, dass mit dem Verschwinden der Determinante die dreifache Proportion gilt

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

Man sieht aber sofort, wie dieselbe nichts Anderes als die Gleichheit der drei entsprechenden Doppelschnittverhältnisse beider Punktereihen ausdrückt, z. B. die Proportion

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha_1' - \alpha_1''}{\alpha_1'' - \alpha_1} : \frac{\alpha_1' - \alpha_1'''}{\alpha_1''' - \alpha_1} = \frac{\alpha_2' - \alpha_2''}{\alpha_2'' - \alpha_2} : \frac{\alpha_2' - \alpha_2'''}{\alpha_2''' - \alpha_2},$$

für das Doppelschnittverhältniss der durch die Punkte α_1'', α_1''' getheilten Strecke $\alpha_1'\alpha_1$ und der entsprechenden durch α_2'', α_2''' getheilten Strecke $\alpha_2'\alpha_2$; etc.

In den Relationen

$$A_1 + B_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + B_2 + C_2 = 0$$

ist zugleich der Zusammenhang gegeben, welcher zwischen den drei Doppelschnittverhältnissen stattfindet, die aus den nämlichen vier Punkten gebildet werden können.

Bezeichnet man die drei Verhältnisse

$$A_1 : B_1, \quad B_1 : C_1, \quad C_1 : A_1$$

durch

$$\delta', \qquad \delta'', \qquad \delta'''$$

respective, so hat man unter gehöriger Beachtung der Vorzeichenänderungen die drei Relationen

$$\frac{1}{\delta'} = 1 - \delta''', \quad \frac{1}{\delta''} = 1 - \delta', \quad \frac{1}{\delta'''} = 1 - \delta'',$$

wie solche im 31. Artikel der „Géométrie supérieure" gegeben sind.

Natürlich erhält man durch die Gleichsetzung eines dieser Verhältnisse mit der negativen Einheit die harmonische Relation wieder, wie sie vorher gegeben ist; es liefert z. B. das erste dieser Doppelschnittverhältnisse

$$\frac{\alpha_1' - \alpha_1''}{\alpha_1'' - \alpha_1} : \frac{\alpha_1' - \alpha_1'''}{\alpha_1''' - \alpha_1} = -1$$

diese Relation in der Form

$$2\,(\alpha_1\alpha_1' + \alpha_1''\alpha_1''') - (\alpha_1 + \alpha_1')\,(\alpha_1'' + \alpha_1''') = 0.$$

Wenn man aber an die Mannichfaltigkeit der Ausdrucksformen denkt, welche die „Géom. supér." und andere der neueren Geometrie gewidmete Werke für die Beziehung der Homographie oder Projectivität geschaffen haben, so bietet auch dafür die analytische Betrachtungsweise natürliche und vielfache Gelegenheit. Man betrachtet z. B. neben den projectivischen Tetraden $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''$; $\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2'''$, für welche die Relation

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_1'\alpha_2' \\ 1, & \alpha_1'', & \alpha_2'', & \alpha_1''\alpha_2'' \\ 1, & \alpha_1''', & \alpha_2''', & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0$$

besteht, noch die anderen $\tau_1, \tau_1', \tau_1'', \tau_1'''; \tau_2, \tau_2', \tau_2'', \tau_2'''$, als für welche ebenfalls die projectivische Relation besteht, die man in der Form

$$\begin{vmatrix} \tau_1\,\tau_2\;, & -\tau_2\;, & -\tau_1\;, & 1 \\ \tau_1'\,\tau_2'\;, & -\tau_2'\;, & -\tau_1'\;, & 1 \\ \tau_1''\,\tau_2''\;, & -\tau_2''\;, & -\tau_1''\;, & 1 \\ \tau_1'''\,\tau_2'''\;, & -\tau_2'''\;, & -\tau_1'''\;, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben denke. Die Multiplication beider Ausdrücke liefert eine allgemeine Gleichung der Projectivität, aus welcher zahlreiche specielle Formen leicht abgeleitet werden können. Sie ist nach der Multiplicationsregel der Determinanten

$$\begin{vmatrix} (\tau_1-\alpha_1)(\tau_2-\alpha_2), & (\tau_1-\alpha_1')(\tau_2-\alpha_2'), & .\;.\;, & (\tau_1-\alpha_1''')(\tau_2-\alpha_2''') \\ (\tau_1'-\alpha_1)(\tau_2'-\alpha_2), & (\tau_1'-\alpha_1')(\tau_2'-\alpha_2'), & .\;.\;, & (\tau_1'-\alpha_1''')(\tau_2'-\alpha_2''') \\ (\tau_1''-\alpha_1)(\tau_2''-\alpha_2), & (\tau_1''-\alpha_1')(\tau_2''-\alpha_2'), & .\;.\;, & (\tau_1''-\alpha_1''')(\tau_2''-\alpha_2''') \\ (\tau_1'''-\alpha_1)(\tau_2'''-\alpha_2), & (\tau_1'''-\alpha_1')(\tau_2'''-\alpha_2'), & .\;.\;, & (\tau_1'''-\alpha_1''')(\tau_2'''-\alpha_2''') \end{vmatrix} = 0.$$

Für die Voraussetzungen

$$\tau_1 = \alpha_1\,,\quad \tau_2 = \alpha_2'\,,\quad \tau_1' = \alpha_1'\,,\quad \tau_2' = \alpha_2,$$
$$\tau_1'' = \alpha_1'',\quad \tau_2'' = \alpha_2''',\quad \tau_1''' = \alpha_1''',\quad \tau_2''' = \alpha_2''$$

verwandelt sich diese Determinante in die andere

$$\begin{vmatrix} 0\;, & 0 & ,(\alpha_1-\alpha_1'')(\alpha_2'-\alpha_2''), & (\alpha_1\;\;\alpha_1''')(\alpha_2'-\alpha_2''') \\ 0\;, & 0 & ,(\alpha_1'-\alpha_1'')(\alpha_2-\alpha_2''), & (\alpha_1'-\alpha_1''')(\alpha_2'-\alpha_2''') \\ (\alpha_1''-\alpha_1)(\alpha_2'''-\alpha_2), & (\alpha_1''-\alpha_1')(\alpha_2'''-\alpha_2'), & 0\;, & 0 \\ (\alpha_1'''-\alpha_1)(\alpha_2''-\alpha_2), & (\alpha_1'''-\alpha_1')(\alpha_2''-\alpha_2'), & 0\;, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letztere zerfällt aber als von der Form

$$\begin{vmatrix} o\,, & o\,, & ah, & cf \\ o\,, & o\,, & de, & bg \\ ab, & ef, & o, & o \\ cd, & gh, & o, & o \end{vmatrix} = (ab.gh - cd.ef)\;(ah.bg - cf.de)$$

in gleiche Factoren

$$[(\alpha_1-\alpha_1'')\;(\alpha_1'-\alpha_1''')\;(\alpha_2-\alpha_2''')\;(\alpha_2'-\alpha_2'')$$
$$-\;(\alpha_1-\alpha_1''')\;(\alpha_1'-\alpha_1'')\;(\alpha_2-\alpha_2'')\;(\alpha_2'-\alpha_2''')]^2 = 0.$$

Diese Relation drückt die Doppelschnittverhältnissgleichheit der beiden Tetraden

$$\alpha_1,\ \alpha_1'',\ \alpha_1',\ \alpha_1''';\ \alpha_2,\ \alpha_2'',\ \alpha_2',\ \alpha_2'''$$

aus, und die beiden möglichen anderen Doppelschnittverhältnissgleichheiten sind leicht durch die beiden anderen analogen Substitutionen zu erhalten; z. B. durch die Substitution

$$\tau_1 = \alpha_1', \; \tau_2 = \alpha_2''', \; \tau_1' = \alpha_1, \; \tau_2' = \alpha_2'', \; \tau_1'' = \alpha_1''', \; \tau_2'' = \alpha_2', \; \tau_1''' = \alpha_1'', \; \tau_2''' = \alpha_2$$

eine Determinante, welche auf dieselbe Weise die Doppelschnittverhältnissgleichheit der Reihen α_1', α_1, α_1''', α_1''; α_2', α_2, α_2''', α_2'' ausdrückt.

Die Relation der Homographie überträgt sich aber endlich mit derselben Leichtigkeit auf zwei Reihen von beliebig vielen Punkten.

Wenn die eine Reihe durch die Wurzelwerthe

$$\alpha_1, \; \alpha_1', \; \alpha_1'', \; \alpha_1''', \; \alpha_1'''', \text{ etc.},$$

die andere durch die entsprechenden

$$\alpha_2, \; \alpha_2', \; \alpha_2'', \; \alpha_2''', \; \alpha_2'''', \text{ etc.}$$

bestimmt ist, so wird durch die Gleichung

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots \\ \alpha_1, & \alpha_1', & \alpha_1'', & \alpha_1''', & \alpha_1'''', & \ldots \\ \alpha_2, & \alpha_2', & \alpha_2'', & \alpha_2''', & \alpha_2'''', & \ldots \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1'\alpha_2', & \alpha_1''\alpha_2'', & \alpha_1'''\alpha_2''', & \alpha_1''''\alpha_2'''', & \ldots \end{matrix} \right\| = 0$$

die Homographie beider Reihen ausgedrückt; wenn dieselbe nach der üblichen Bezeichnungsweise die Gleichheit aller Determinanten mit Null vertritt, die aus irgend vier verschiedenen Verticalreihen des von ihr umfassten Aggregates gebildet sind. Denn sie bezeichnet dann die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse von vier Punkten des einen Systems mit denen der entsprechenden vier Punkte des anderen Systems.

Ihre Form giebt den Satz: Wenn irgend drei Punkte des einen und die entsprechenden drei Punkte des anderen Systems gegeben sind, so kann zu jedem vierten Punkte des ersten der entsprechende des zweiten linear gefunden werden.

Da durch die entwickelten Ausdrücke ebensowohl die Natur der Elemente beider homographischen Reihen als auch ihre gegenseitige Lage vollkommen unbestimmt gelassen ist, so können nach den Erörterungen des 1. Artikels beide Reihen ebensowohl aus Elementen derselben Art, als aus Elementen verschiedener Art bestehen, d. i. sie können gleichzeitig geradlinige Punktereihen, oder Strahlenbüschel etc., oder es kann die eine von ihnen eine geradlinige Punkte-

reihe, die andere ein Ebenenbüschel etc. sein; und sie können andererseits ebensowohl ganz getrennt von einander, als auch *innerhalb eines gemeinschaftlichen Ortes* gelegen gedacht werden, d. i. zwei Punktereihen in derselben geraden Linie, zwei Strahlenbüschel in demselben Punkte, zwei Ebenenbüschel in derselben Scheitelkante. Aber diese letztere Voraussetzung führt zu der wichtigen Erkenntniss der *Existenz von Doppelelementen*, d. h. von solchen, welche als Vereinigungen zweier entsprechender Elemente beider Reihen anzusehen sind, also von Doppelpunkten in zwei vereinigten projectivischen Reihen, von Doppelstrahlen und Doppelebenen in zwei vereinigten projectivischen Strahlen- oder Ebenen-Büscheln. Diese Doppelelemente verbinden die Theorie der Projectivität mit der *Theorie der Involution*, zu welcher sich die Untersuchung deshalb von Neuem zu wenden hat.

4.

Die Punktepaare α_1, α_2; α_1', α_2'; α_1'', α_2''; α_1''', α_2''' etc. *sind in Involution, wenn man hat*

$$\begin{Vmatrix} 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & .\,. \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & .\,. \\ \alpha_1\alpha_2\,, & \alpha_1'\alpha_2'\,, & \alpha_1''\alpha_2''\,, & .\,. \end{Vmatrix} = 0,$$

d. h. *wenn jede der aus drei Verticalreihen des hier umfassten Aggregats gebildeten Determinanten den Werth Null hat*; denn jede derselben giebt die involutorische Relation der drei von ihr umfassten Punktepaare. Wenn aber diess der Fall ist, so hat man auch

$$\begin{vmatrix} 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & 1 \\ \alpha_1 \;, & \alpha_1' \;, & \alpha_1'' \;, & \alpha_1''' \\ \alpha_2 \;, & \alpha_2' \;, & \alpha_2'' \;, & \alpha_2''' \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1'\alpha_2', & \alpha_1''\alpha_2'', & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0,$$

die Relation der Projectivität, denn diese Determinante kann in der Form

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \;, & \alpha_1' \;, & \alpha_1'' \;, & \alpha_1''' \\ 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & \alpha_1'''+\alpha_2''' \\ \alpha_1\alpha_2\,, & \alpha_1'\alpha_2'\,, & \alpha_1''\alpha_2''\,, & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden, welche die Involution aller der aus ihren Elementen zu bildenden Gruppen von Paaren umfasst. Es verdient aber besonders bemerkt zu werden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 \\ \alpha_1 & , & \alpha_2' & , & \alpha_2'' & , & \alpha_2''' \\ \alpha_2 & , & \alpha_1' & , & \alpha_1'' & , & \alpha_1''' \\ \alpha_1\alpha_2 & , & \alpha_1'\alpha_2' & , & \alpha_1''\alpha_2'' & , & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0,$$

welche die Projectivität der Reihen α_1, α_2', α_2'', α_2''' und α_2, α_1', α_1'', α_1''' ausdrückt, nicht minder wie die vorige auf die involutorische Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & , & \alpha_2' & , & \alpha_2'' & , & \alpha_2''' \\ 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & & \alpha_1'+\alpha_2', & & \alpha_1''+\alpha_2'', & & \alpha_1'''+\alpha_2''' \\ \alpha_1\alpha_2 & , & \alpha_1'\alpha_2' & , & \alpha_1''\alpha_2'' & , & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0 .$$

führt, dass somit unter der Voraussetzung, es seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2;\ \alpha_1',\ \alpha_2';\ \alpha_1'',\ \alpha_2'';\ \alpha_1''',\ \alpha_2'''$$

involutorische Punktepaare, ebensowohl

$$\alpha_1,\ \alpha_1',\ \alpha_1'',\ \alpha_1''' \text{ und } \alpha_2,\ \alpha_2',\ \alpha_2'',\ \alpha_2''',$$

als auch

$$\alpha_1,\ \alpha_2',\ \alpha_2'',\ \alpha_2''' \text{ und } \alpha_2,\ \alpha_1',\ \alpha_1'',\ \alpha_1'''$$

projectivische Reihen sind; d. h. dass die Relation der Projectivität zwischen beiden Reihen nicht gestört wird, wenn man einen beliebigen Punkt der ersten Reihe als der zweiten und den ihm entsprechenden Punkt der zweiten Reihe als der ersten angehörig betrachtet. Diess ist die bekannte characteristische Eigenschaft der Involution;*) und sie kann für nur drei Paare von Elementen ganz in derselben Weise ausgesprochen werden, denn für die aus den Elementen von drei Paaren α_1, α_2; α_1', α_2'; α_1'', α_2''' gebildeten Reihen α_1, α_1', α_1'', α_2; α_2, α_2', α_2'', α_1 leitet ebenfalls die Beziehung der Projectivität direct auf die der Involution. Es ist

*) Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn." Art. 409 u. 425. — „Géométrie supérieure" Art. 241.

$$0=\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1 \\ \alpha_1\,, & \alpha_1'\,, & \alpha_1''\,, & \alpha_2 \\ \alpha_2\,, & \alpha_2'\,, & \alpha_2''\,, & \alpha_1 \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1'\alpha_2', & \alpha_1''\alpha_2'', & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\,, & \alpha_1'\,, & \alpha_1''\,, & \alpha_2 \\ 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2\,, & \alpha_1'\alpha_2'\,, & \alpha_1''\alpha_2''\,, & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1\,, & \alpha_1'\,, & \alpha_1''\,, & \alpha_1-\alpha_2 \\ 1\,, & 1\,, & 1\,, & 0 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & 0 \\ \alpha_1\alpha_2\,, & \alpha_1'\alpha_2'\,, & \alpha_1''\alpha_2''\,, & 0 \end{vmatrix},$$

(nämlich durch Subtraction der Glieder der letzten Reihe von denen der ersten)

$$= (\alpha_1-\alpha_2)\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'' \\ \alpha_1\alpha_2\,, & \alpha_1'\alpha_2'\,, & \alpha_1''\alpha_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Der Ausdruck der Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse der Reihen

$$\alpha_1,\ \alpha_1',\ \alpha_1'',\ \alpha_2 \text{ und } \alpha_2,\ \alpha_2',\ \alpha_2'',\ \alpha_1$$

als die Bedingung ihrer Projectivität

$$\frac{\alpha_1-\alpha_1'}{\alpha_1'-\alpha_2} : \frac{\alpha_1-\alpha_1''}{\alpha_1''-\alpha_2} = \frac{\alpha_2-\alpha_2'}{\alpha_2'-\alpha_1} : \frac{\alpha_2-\alpha_2''}{\alpha_2''-\alpha_1},$$

oder

$$(\alpha_1-\alpha_1')\,(\alpha_1''-\alpha_2)\,(\alpha_2'-\alpha_1)\,(\alpha_2-\alpha_2'')$$
$$= (\alpha_2-\alpha_2')\,(\alpha_2''-\alpha_1)\,(\alpha_1'-\alpha_2)\,(\alpha_1-\alpha_1'')$$

giebt demnach auch eine Bedingung ihrer Involution.

Man kann diese involutorische Relation in sehr verschiedenen Formen geben; eines der Mittel, dieselben zu erhalten, besteht in der Multiplication der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'' \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1'\alpha_1'\,, & \alpha_1''\alpha_2'' \end{vmatrix} = 0$$

mit der Identität

$$\begin{vmatrix} \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \\ -\lambda\,, & -\mu\,, & -\nu \\ 1, & 1\,, & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\mu)\,(\mu-\nu)\,(\nu-\lambda).$$

Wenn man die Involutions-Determinante durch D_i bezeichnet, so hat man

$$D_i\ (\lambda-\mu)\,(\mu-\nu)\,(\nu-\lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2), & (\lambda-\alpha_1')(\lambda-\alpha_2'), & (\lambda-\alpha_1'')(\lambda-\alpha_2'') \\ (\mu-\alpha_1)(\mu-\alpha_2), & (\mu-\alpha_1')(\mu-\alpha_2'), & (\mu-\alpha_1'')(\mu-\alpha_2'') \\ (\nu-\alpha_1)(\nu-\alpha_2), & (\nu-\alpha_1')(\nu-\alpha_2'), & (\nu-\alpha_1'')(\nu-\alpha_2'') \end{vmatrix},$$

als die allgemeine Form der involutorischen Relation.

Daraus entspringt für

$$\lambda = \alpha_1, \ \mu = \alpha_2$$

die Gleichung

$$D_i \ (\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_2-\nu)\ (\nu-\alpha_1) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & ,(\alpha_1-\alpha_1')(\alpha_1-\alpha_2'), & (\alpha_1-\alpha_1'')(\alpha_1-\alpha_2'') \\ 0 & ,(\alpha_2-\alpha_1')(\alpha_2-\alpha_2'), & (\alpha_2-\alpha_1'')(\alpha_2-\alpha_2'') \\ (\nu-\alpha_1)(\nu-\alpha_2), & (\nu-\alpha_1')\ (\nu-\alpha_2'), & (\nu-\alpha_1'')\ (\nu-\alpha_2'') \end{vmatrix},$$

d. i.

$$D_i \ (\alpha_1-\alpha_2) = - \begin{vmatrix} (\alpha_1-\alpha_1')\ (\alpha_1-\alpha_2'), & (\alpha_1-\alpha_1'')\ (\alpha_1-\alpha_2'') \\ (\alpha_2-\alpha_1')\ (\alpha_2-\alpha_2'), & (\alpha_2-\alpha_1'')\ (\alpha_2-\alpha_2'') \end{vmatrix}.$$

Man erhält demnach die involutorische Relation in der Form

$$(\alpha_1-\alpha_1')\ (\alpha_1-\alpha_2')\ (\alpha_2-\alpha_1'')\ (\alpha_2-\alpha_2'')$$
$$= (\alpha_2-\alpha_1')\ (\alpha_2-\alpha_2')\ (\alpha_1-\alpha_1'')\ (\alpha_1-\alpha_2'')$$

oder

$$\frac{\alpha_1-\alpha_1'}{\alpha_1'-\alpha_2} : \frac{\alpha_1-\alpha_1''}{\alpha_1''-\alpha_2} = \frac{\alpha_2-\alpha_2'}{\alpha_2'-\alpha_1} : \frac{\alpha_2-\alpha_2''}{\alpha_2''-\alpha_1},$$

d. i. die schon betrachtete Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse der Tetraden aus drei Paaren.

Man erhält ebenso für

$$\lambda = \alpha_1, \ \mu = \alpha_1', \ \nu = \alpha_1''$$

die Relation

$$D_i \ (\alpha_1-\alpha_1')\ (\alpha_1'-\alpha_1'')\ (\alpha_1''-\alpha_1) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & ,(\alpha_1-\alpha_1')\ (\alpha_1-\alpha_2'), & (\alpha_1-\alpha_1'')\ (\alpha_1-\alpha_2'') \\ (\alpha_1'-\alpha_1)\ (\alpha_1'-\alpha_2), & 0 & ,(\alpha_1'-\alpha_1'')(\alpha_1'-\alpha_2'') \\ (\alpha_1''-\alpha_1)(\alpha_1''-\alpha_2), & (\alpha_1''-\alpha_1')(\alpha_1''-\alpha_2'), & 0 \end{vmatrix},$$

aus welcher die Factoren $(\alpha_1-\alpha_1')\ (\alpha_1'-\alpha_1'')\ (\alpha_1''-\alpha_1)$ beiderseits verschwinden, so dass

$$D_i = (\alpha_1-\alpha_2')\ (\alpha_1'-\alpha_2'')\ (\alpha_1''-\alpha_2) + (\alpha_1-\alpha_2'')(\alpha_1'-\alpha_2)\ (\alpha_1''-\alpha_2')$$

wird, oder die involutorische Relation

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2')\ (\alpha_1'-\alpha_2'')\ (\alpha_1''-\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_2'')\ (\alpha_1'-\alpha_2)\ (\alpha_1''-\alpha_2')} = -1$$

sich ergiebt, welche man wie die vorige z. B. im Art. 184 der „Géométrie supérieure“ findet.

Wenn eine beliebige Anzahl von Elementen-Paaren α_1, α_2; α_1', α_2'; α_1'', α_2''; α_1''', α_2''' etc. eine Involution bilden und in Bezug auf irgend vier Segmente des Systems $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1'\alpha_2'$, $\alpha_1''\alpha_2''$, $\alpha_1'''\alpha_2'''$ die zu einem durch die Wurzel σ bezeichneten Element con-

jugiert harmonischen Elemente $\sigma_{12}, \sigma_{12}', \sigma_{12}'', \sigma_{12}'''$ bestimmt werden, so ist das Doppelschnittverhältniss dieser letzteren unabhängig von der Lage des ersteren, d. h. die Elementenreihe $\sigma_{12}, \sigma_{12}', \sigma_{12}'', \sigma_{12}'''$ ist mit der einem anderen Element τ harmonisch conjugierten Reihe $\tau_{12}, \tau_{12}', \tau_{12}'', \tau_{12}'''$ projectivisch, d. i. man hat die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 1 \\ \sigma_{12} \,, & \sigma_{12}' \,, & \sigma_{12}'' \,, & \sigma_{12}''' \\ \tau_{12} \,, & \tau_{12}' \,, & \tau_{12}'' \,, & \tau_{12}''' \\ \sigma_{12}\tau_{12}, & \sigma_{12}'\tau_{12}', & \sigma_{12}''\tau_{12}'', & \sigma_{12}'''\tau_{12}''' \end{vmatrix} = 0.$$

Es gilt, die Identität dieser Relation mit der involutorischen der gegebenen Segmente zu erweisen. Dabei darf man, da die Relationen der Projectivität und Involution durch Coordinatentransformation nicht gestört werden, die Lage der Elemente τ und σ, ohne an der Allgemeingiltigkeit des Beweises einzubüssen, dahin specialisieren, dass $\tau = \infty$ und $\sigma = 0$ ist, d. h. dass das Letztere mit dem einen der festen Elemente des Coordinatensystems zusammenfällt, auf welches das Gebilde bezogen ist. Unter diesen Voraussetzungen hat man

$$\sigma_{12} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \sigma_{12}' = \frac{2\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_2+\alpha_2'}, \ldots,$$

$$\tau_{12} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \quad \tau_{12}' = \frac{\alpha_1'+\alpha_2'}{2}, \ldots,$$

so dass die vorausgesetzte Gleichung die Form

$$\begin{vmatrix} 1 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 1 \\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}, & \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_1'+\alpha_2'}, & \frac{\alpha_1''\alpha_2''}{\alpha_1''+\alpha_2''}, & \frac{\alpha_1'''\alpha_2'''}{\alpha_1'''+\alpha_2'''} \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & \alpha_1'''+\alpha_2''' \\ \alpha_1\alpha_2 \,, & \alpha_1'\alpha_2' \,, & \alpha_1''\alpha_2'' \,, & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix} = 0$$

annimmt, welche, in ihre Partialdeterminanten zerlegt, in der Gestalt

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \begin{vmatrix} 1 \,, & 1 \,, & 1 \\ \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'', & \alpha_1'''+\alpha_2''' \\ \alpha_1'\alpha_2' \,, & \alpha_1''\alpha_2'' \,, & \alpha_1'''\alpha_2''' \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_1'+\alpha_2'} \cdot \begin{vmatrix} 1 \,, & 1 \,, & 1 \\ \alpha_1''+\alpha_2'', & \alpha_1'''+\alpha_2''', & \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1''\alpha_2'' \,, & \alpha_1'''\alpha_2''' \,, & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{\alpha_1''\alpha_2''}{\alpha_1''+\alpha_2''}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1'''+\alpha_2''', & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2' \\ \alpha_1'''\alpha_2''' , & \alpha_1\alpha_2 , & \alpha_1'\alpha_2' \end{vmatrix}$$

$$+\frac{\alpha_1'''\alpha_2'''}{\alpha_1'''+\alpha_2'''}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1'+\alpha_2', & \alpha_1''+\alpha_2'' \\ \alpha_1\alpha_2 , & \alpha_1'\alpha_2' , & \alpha_1''\alpha_2'' \end{vmatrix}=0$$

als eine unmittelbare Consequenz der involutorischen Beziehung der gegebenen vier Punktepaare erkannt wird.

Daraus entspringt der **Begriff einer zur Involution projectivischen Reihe**, welcher einer der wichtigsten der neueren Geometrie ist.

Wenn endlich

$$\delta_i', \ \delta_i'', \ \delta_i'''$$

wie früher die Doppelschnittverhältnisse der Reihe

$$\alpha_i, \ \alpha_i', \ \alpha_i'', \ \alpha_i'''$$

und

$$d_i', \ d_i'', \ d_i'''$$

die der

$$a_i, \ a_i', \ a_i'', \ a_i'''$$

sind, so geben die vier Paare von Reihen

$$\begin{array}{l} \alpha\ , \alpha'\ , \alpha''\ , \alpha'''\ ; \ a\ , a'\ , a''\ , a'''\ ; \\ \alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''; \ a_1, a_1', a_1'', a_1'''; \\ \alpha_2, \alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2'''; \ a_2, a_2', a_2'', a_2'''; \\ \alpha_3, \alpha_3', \alpha_3'', \alpha_3'''; \ a_3, a_3', a_3'', a_3''' \end{array}$$

die entsprechenden Gruppen der Doppelschnittverhältnisse

$$\begin{array}{l} \delta'\ , \delta''\ , \delta'''\ ; \ d'\ , d''\ , d'''\ ; \\ \delta_1', \delta_1'', \delta_1'''; \ d_1', d_1'', d_1'''; \\ \delta_2', \delta_2'', \delta_2'''; \ d_2', d_2'', d_2'''; \\ \delta_3', \delta_3'', \delta_3'''; \ d_3', d_3'', d_3''' \end{array}$$

mit den bedingenden Relationen

$$\delta_i'+\delta_i''+\delta_i'''=0,$$
$$d_i'+d_i''+d_i'''=0.$$

Mittelst dieser Letzteren erkennt man dann leicht, dass die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 , & 1 , & 1 , & 1 \\ \frac{\delta'}{\delta''} , & \frac{\delta_1'}{\delta_1''} , & \frac{\delta_2'}{\delta_2''} , & \frac{\delta_3'}{\delta_3''} \\ \frac{d'}{d''} , & \frac{d_1'}{d_1''} , & \frac{d_2'}{d_2''} , & \frac{d_3'}{d_3''} \\ \frac{\delta' d'}{\delta'' d''} , & \frac{\delta_1' d_1'}{\delta_1'' d_1''} , & \frac{\delta_2' d_2'}{\delta_2'' d_2''} , & \frac{\delta_3' d_3'}{\delta_3'' d_3''} \end{vmatrix}=0$$

oder
$$\begin{vmatrix} \delta''d'', & \delta_1''d_1'', & \delta_2''d_2'', & \delta_3''d_3'' \\ \delta'd'', & \delta_1'd_1'', & \delta_2'd_2'', & \delta_3'd_3'' \\ \delta''d', & \delta_1''d_1', & \delta_2''d_2', & \delta_3''d_3' \\ \delta'd', & \delta_1'd_1', & \delta_2'd_2', & \delta_3'd_3' \end{vmatrix} = 0$$

von dem Verhältniss $\frac{\delta'}{\delta''}$ unabhängig und daher der allgemeine Ausdruck einer zwischen den vier Reihen

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''; \ \alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''; \ \alpha_2, \alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2'''; \ \alpha_3, \alpha_3', \alpha_3'', \alpha_3'''$$

und den vier entsprechenden

$$a, a', a'', a'''; \ a_1, \ldots\ldots; \ a_2, \ldots\ldots; \ a_3, \ldots\ldots$$

bestehenden Abhängigkeit ist. Chasles hat dieselbe als eine Homographie der Reihen bezeichnet. Wenn sie stattfindet, so kann man in der letzten von vier mal zwei correspondierenden Tetraden ein Element aus der Kenntniss der übrigen bestimmen.

5.

Nachdem im Vorigen die hauptsächlichsten Theorien der neueren Geometrie in Bezug auf die Grundgebilde, die Punktereihen, ebenen Strahlenbüschel und Ebenenbüschel, analytisch vorgetragen wurden, erscheint es nun genügend, daran zu erinnern, wie aus der Theorie der Grundgebilde die der zusammengesetzten Gebilde hervorgeht.

Zwei projectivische Punktereihen in verschiedenen Geraden, aber in einer und derselben Ebene liegend, geben, als der Enveloppe der geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte, einer Curve zweiter Klasse den Ursprung; weil für jeden Punkt dieser Ebene den beiden projectivischen Strahlenbüscheln, welche er mit den gedachten beiden Reihen bestimmt, zwei Doppelstrahlen zugehören, die jedoch je nach seiner Lage reell oder imaginär sein oder in einen einzigen Strahl zusammenfallen können. Die Punkte dieser letzteren Art gehören der Curve an und in Folge dessen berühren die beiden Geraden der projectivischen Reihen selbst die Curve in den Punkten, welche in einer jeden dem Durchschnittspunkt der anderen mit ihr entsprechen.

Ebenso bestimmen zwei projectivische Strahlenbüschel in derselben Ebene aber von verschie-

denen Scheiteln durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen eine Curve zweiten Grades, weil die beiden projectivischen Punktereihen, welche jede geradlinige Transversale mit jenen Büscheln bestimmt, je nach der Lage dieser Transversale reelle, zusammenfallende oder imaginäre Doppelpunkte haben können; sie wird in den Scheiteln dieser Büschel von denjenigen Strahlen berührt, die in jedem der beiden Büschel der Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Scheitel des anderen Büschels entsprechen.

Zwei geradlinige projectivische Punktereihen im Raume, — um diess nur kurz anzugeben — deren gerade Träger sich nicht schneiden, bestimmen durch die geraden Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punktepaare das System der Erzeugenden der nämlichen Art eines einfachen Hyperboloids, dem jene selbst als Erzeugende der anderen Art angehören.

Zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten sich nicht schneiden, bestimmen in den Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen die Schaar der geradlinigen Erzeugenden des einfachen Hyperboloids, welchem jene Scheitelkanten als Erzeugende der anderen Art und diese Ebenen als Tangentialebenen angehören.

Die Regelschaar des Hyperboloids wird zur Schaar der geradlinigen Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades, wenn die Scheitelkanten der beiden projectivischen Ebenenbüchel sich in einem Punkte schneiden; etc.

Die Ebene, welche je drei entsprechende Punkte dreier auf verschiedenen Geraden im Raume liegenden projectivischen Punktereihen verbindet, beschreibt eine Raumcurve dritter Klasse und dritter Ordnung.

Es ist bekannt, wie die erstgenannten Gebilde, die Punktereihe einer Kegelschnittslinie und das System der Tangenten einer solchen, das System der Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades und das System seiner Tangential-

ebenen, — endlich das System der Erzeugenden derselben Art eines einfachen Hyperboloids — von der neueren Geometrie als Elementargebilde zweiter Stufe bezeichnet werden. Die unebene Curve dritter Ordnung und Klasse und das ihr sich anschmiegende Ebenensystem hat man seit der Begründung ihrer Theorie als Elementargebilde dritter Stufe, das System geradliniger Strahlen endlich, welches von den Tangenten einer solchen Curve, d. i. von den Durchschnittslinien der auf einander folgenden Ebenen des vorher bezeichneten Systems gebildet wird, als Elementargebilde vierter Stufe bezeichnet. Auch ist im Allgemeinen bekannt, wie von den Elementargebilden der Uebergang zu den zusammengesetzten Formen höheren Grades vollzogen wird, indem man Büschel von Curven und Büschel von Oberflächen in die Reihe der generierenden Gebilde einführt.

Die analytische Discussion aller dieser Theile der weiteren Entwickelung liegt ausserhalb der Grenzen dieser Untersuchung.

Aus der Betrachtung der Grundgebilde entspringen die Theorien der Homographie oder Collineation und der Reciprocität, die systematische Entwickelung der gegenseitigen Abhängigkeit der Figuren, in denen alle entsprechenden Punktereihen, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel homographisch sind. Vier Punkte und ihre entsprechenden, welche nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Collineation ebener Systeme ebenso, wie vier gerade Linien und ihre entsprechenden, die nicht durch einen Punkt gehen. Vier Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, und die entsprechenden vier geraden Linien, die nicht durch einen Punkt gehen, bestimmen die Reciprocität zweier ebenen Systeme. Denn jedes fünfte Element der ersten Ebene bestimmt mit den drei je in einer Ecke oder Seite des gegebenen Vierecks enthaltenen Elementen ein vierstrahliges Büschel oder eine vierpunktige Reihe, welche dem entsprechenden Elementargebilde des zweiten Systems projectivisch ist, so dass in Folge dessen das vierte Elemente dieses Letzteren linear construiert werden kann; Punkte werden so als Durchschnittspunkte ent-

sprechender Strahlen, gerade Linien als Verbindungslinien entsprechender Punkte bestimmt. Das Analoge findet statt bei der Bestimmung räumlicher collinearer und reciproker Systeme durch fünf Elemente des einen und die entsprechenden des andern, welche nicht in einer Ebene liegen.

Ebenso aber, wie die geometrische Construction in der angedeuteten Weise aus der Zusammensetzung der Elementargebilde hervorgeht, so ist auch die analytische Theorie der Collineation und Reciprocität die natürliche Erweiterung der analytischen Theorie der Grundgebilde; sie geht aus der Theorie der linearen Transformationen hervor, wenn man sie auf ternäre Formen als den analytischen Ausdruck ebener Curven und conischer Flächen und auf quaternäre Formen als den analytischen Ausdruck räumlicher Systeme anwendet. Es darf für die Entwickelung, so weit sie sich auf ebene Systeme erstreckt, wohl hier auf die „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" verwiesen werden; die analogen Entwickelungen der räumlichen Geometrie lassen sich von denselben Hauptgesichtspunkten aus leicht gewinnen.*)

Um nur ein characteristisches Beispiel von der Art und Weise zu erwähnen, in welcher sich die analytischen Charactere der Grundgebilde auf die zusammengesetzten Formen übertragen, sei erinnert an das Dreieck der Doppelpunkte bei zwei in derselben Ebene gelegenen collinearen Systemen; es entspricht genau den Doppelpunkten der Involution oder denen zweier homographischer Theilungen in derselben geraden Linie. Man weiss aus Art. 2, dass dieselben durch das Verschwinden der Jacobi'schen Functionaldeterminante der beiden binären Formen zweiten Grades gegeben sind, welche die Involution bestimmen, als das einzige mögliche Punktepaar, welches zu den beiden gegebenen Punktepaaren zugleich in harmonischer Relation ist. Auf ganz analoge Weise ergiebt sich das Dreieck der Doppelpunkte von zwei collinearen Systemen oder das Dreieck der sich selbst conjugierten Punkte von zwei Kegelschnitten

*) Man vergleiche a. a. O. Art. 379 zur Uebersicht und Art. 453 bis 476; man findet ebendaselbst die Zusammenhänge mit den Methoden der Projectionen und der reciproken Polaren, jene in den Art. 380—402, diese in den Art. 432—452 vollständig entwickelt.

$$S = 0,\ S_1 = 0$$

durch das identische Verschwinden der Jacobi'schen Functionaldeterminante der drei Formen S, S' und F, von denen die dritte durch Gleichsetzung mit Null denjenigen Kegelschnitt repräsentiert, welcher durch die Berührungspunkte der acht gemeinschaftlichen Tangenten beider gegebener Kegelschnitte zugleich hindurchgeht, und welcher zugleich der geometrische Ort aller der Punkte ist, für welche das Büschel der an die Kegelschnitte

$$S = 0,\ S_1 = 0$$

gelegten Tangenten ein harmonisches Büschel ist.*) Diess Dreieck aber hat zu jedem der drei Kegelschnitte

$$S = 0,\ S_1 = 0,\ F = 0$$

die Beziehung, dass jede seiner Ecken die gegenüberliegende Seite zu der in Bezug auf dieselben genommenen Polare hat; eine Beziehung, in welcher bekanntlich die harmonische Relation wiederkehrt, da jede durch den Pol gehende Sehne in der Polare den dem Pol conjugierten harmonischen Theilpunkt des Segments bestimmt, welches durch den Kegelschnitt in ihr bezeichnet ist.

Eben diese harmonische Relation von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt ist aber eine sehr specielle Folge einer anderen Erweiterung der analytischen Theorie der Grundgebilde, die hier noch kurz bezeichnet werden muss. Die in der Gleichung

$$\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$$

des Art. 3 enthaltene analytische Definition der Involution von drei Paaren von Elementen kann direct auf Curven und Oberflächen als zusammengesetzte Gebilde übertragen werden. Man darf drei Curven desselben Grades

$$U = 0,\ U' = 0,\ U'' = 0$$

als in Involution bezeichnen, wenn zwischen ihren Gleichungen und den Constanten λ, μ, ν die lineare Relation

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$$

besteht; und man erkennt leicht, wie der von Sturm zuerst bewiesene Satz,**) nach welchem alle die dem nämlichen

*) Man vergl. a. a. O. Art. 400, Aufg. 3 u. 4; Art. 431.

**) Gergonne's „Annales de Mathém." t. XVII.

Viereck umschriebenen Kegelschnitte in einer beliebigen Transversale ein System involutorischer Punkte bestimmen, sammt den früheren von Desargues und Pappus, welche specielle Fälle von ihm sind, — dass die Punkte, in welchen eine beliebige Transversale die Gegenseitenpaare eines Vierecks und einen demselben umschriebenen Kegelschnitt schneidet, sowie die Punkte, in welchen die Gegenseiten und Diagonalen eines Vierecks von einer Transversale geschnitten werden, in Involution sind, — und den in der Beziehung der Dualität zu allen diesen stehenden Sätzen im einfachsten Zusammenhang mit jener Verallgemeinerung sind. Als einfache Fälle entspringen bekanntlich daraus die graphische Bestimmung einer Involution, die Construction der Doppelpunkte und des Centralpunktes derselben.

Die Uebertragung derselben Grundsätze auf Kreise giebt die ganze Theorie der durch dieselben zwei Punkte gehenden Kreise; die beiden andern gemeinschaftlichen Punkte sind dann die imaginären Kreispunkte im Unendlichen. Da somit die eine der Gegenseiten des Vierecks unendlich entfernt ist, so bestimmt die andere, d. i. die Chordale der Kreise, das Centrum der Involution.

Fallen die Durchschnittspunkte beider Kegelschnitte paarweis zusammen, d. h. haben beide eine doppelte Berührung, so bilden die Berührungssehnen und das Paar der gemeinschaftlichen Tangenten die Gegenseitenpaare des gemeinschaftlich eingeschriebenen Vierecks; in Folge dessen sind der Pol der Berührungssehne und der Durchnittspunkt einer beliebigen durch ihn gehenden Transversale mit der Berührungssehne selbst die Doppelpunkte einer Involution, welcher die von jener Transversale in beiden Kegelschnitten bestimmten Sehnen als involutorische Segmente angehören, und somit auf die Endpunkte derselben harmonisch bezogen. Daraus entspringt die harmonische Relation von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Endlich aber führt die Ausdehnung der so bezeichneten Betrachtungen auf Curven höherer Ordnung etc. zu einer entsprechenden Erweiterung der Theorie der Involution der Grundgebilde oder der binären Formen. Man erhält durch die Betrachtung der Schnittpunkte eines solchen Curven-

systems mit einer beliebigen Transversale binäre Formen höherer Grade, welche Punktegruppen — ternäre, quaternäre etc., je nachdem diese Curven vom dritten, vierten Grade etc. waren — repräsentieren, die dann gleichfalls als in Involution bezeichnet werden müssen. In der That gehen die Eigenschaften der elementaren Involution auf ein solches System über; man kann z. B. zu zwei Gruppen von Elementen m^{ter} Ordnung

$$U = 0, \; U' = 0$$

in 2 $(m-1)$ verschiedenen Arten eine dritte Gruppe derselben Ordnung

$$U'' = 0$$

bestimmen, die mit jenen durch die lineare Relation

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$$

verbunden ist und zugleich einen Doppelpunkt hat — Doppelpunkte der Involution; man findet, dass in Bezug auf vier Gruppen von je m Punkten innerhalb derselben Geraden die Centra der harmonischen Mittel für einen Punkt dieser Geraden ein von seiner Lage in ihr unabhängiges Doppelschnittverhältniss bestimmen; dass in jeder derartigen Involution $(m-1)$ Punkte existieren, für deren jeden das Product seiner Entfernungen von allen Punkten derselben Gruppe einen von Gruppe zu Gruppe sich gleichbleibenden Werth hat — Centralpunkte der Involution; etc. Wie die elementare Involution dem Büschel von Kegelschnitten, so entspringt diese allgemeinere dem Büschel von Curven m^{ter} Ordnung, ihre Doppelpunkte sind z. B. die Berührungspunkte der $(m-1)$ Curven des Büschels, welche die als Träger der Involution gegebene Gerade berühren.

Die allgemeine Theorie der Curven und Oberflächen führt überall zu solchen Betrachtungen zurück, die eben desshalb hier nur anzudeuten sind.

II. Kapitel.

Die Algebra der binären Formen als Grundlage für die analytische Theorie der geometrischen Elementargebilde.

Wenn in dem vorhergehenden Abschnitt zunächst die analytischen Ausdrucksformen der Grundbegriffe und der hauptsächlichsten Theorien der neueren Geometrie gegeben wurden und wenn es vorläufig genügend erschien, sie dadurch an die vorher bezeichneten allgemeinen Grundgedanken zu knüpfen, dass die Invarianten- und Covarianten-Natur der wesentlichen darin auftretenden algebraischen Ausdrücke a posteriori gezeigt ward, so bleibt jetzt übrig nachzuweisen, wie eben diese Ausdrücke mit Nothwendigkeit aus der algebraischen Theorie der binären Formen hervorgehen, und damit darzuthun, wie die rein algebraische Entwickelung der Formen nur der rechten Interpretation bedarf, um zugleich die geometrische Theorie der Formen zu erhalten. Diese Aufgabe lässt sich naturgemäss an diejenigen Formen der bezeichneten algebraischen Ausdrücke anknüpfen, in welchen sie mittelst der Wurzeln der gegebenen Gleichungen dargestellt sind; der Ueberblick über dieselben zeigt, dass sie von der Klasse der symmetrischen Functionen der Wurzeln sind, denn symmetrisch heisst jede Function mehrerer Grössen, deren Werth durch keine der möglichen Vertauschungen unter diesen Grössen geändert wird. Die Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln steht daher

am Eingange dieser Untersuchungen, und beim Rückblick auf den Werth, den gerade die Ausdrucksformen der betrachteten Invarianten und Covarianten in Gliedern der Wurzeln für die geometrische Interpretation derselben hatten, während sie naturgemäss zuerst als Functionen der in den gegebenen Formen enthaltenen Coefficienten gebildet wurden, erkennt man, dass sofort damit verbunden werden muss die Theorie der symmetrischen Functionen der Coefficienten. Daran schliessen sich alsdann andere Theile der Theorie binärer Formen natürlich und ungezwungen an.

I. Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

6.

Es ist bekannt, wie die Coefficienten der Gleichungen selbst die einfachsten symmetrischen Functionen ihrer Wurzeln sind. Wenn im Anschluss an die früher gebrauchten Bezeichnungen durch

$$(a_0, a_1, a_2, \dots a_n \between x, y)^n = 0$$

die Gleichung und durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ ihre Wurzeln d. h. die Werthe von $\frac{x}{y}$ bezeichnet werden, welche dieselben zu einer Identität machen, so hat man die bekannten Relationen

$$-\frac{a_1}{a_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \Sigma \alpha_1;$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_2\alpha_n + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$= \Sigma \alpha_1\alpha_2;$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \dots \qquad + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$= \Sigma \alpha_1\alpha_2\alpha_3; \text{ etc.}$$

$$\pm \frac{a_n}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n,$$

in denen überall $a_0 = 1$ gesetzt werden darf, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Die hohe Bedeutung, welche die symmetrischen Functionen (zunächst der Wurzeln) in der Algebra haben, entspringt aus einer Reihe wichtiger allgemeiner Eigenschaften derselben.

Für das Studium derselben darf man sich auf die ganzen rationalen symmetrischen Functionen, und unter diesen wieder, weil aus ihnen alle anderen durch Zusammensetzung gebildet werden können, auf die homogenen symmetrischen Functionen beschränken. Als die einfachsten derselben erscheinen diejenigen, in denen jedes Glied nur eine der Wurzeln der Gleichung enthält, d. h. die Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln. Die zu ihrer Berechnung führenden Formeln hat bereits Newton und vor ihm (1629) Girard gegeben; unter Anwendung des kürzeren Symbols s_t statt $\Sigma\alpha_1^t$ für die Summe der t^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln sind sie die folgenden:

$$a_1 + a_0 s_1 = 0,$$
$$2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 = 0,$$
$$3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3 = 0,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$ta_t + a_{t-1} s_1 + \ldots + a_2 s_{t-2} + a_1 s_{t-1} + a_0 s_t = 0.*)$$

Wir geben eine Ableitung derselben, um in ihr gleichzeitig einige für das Folgende wichtige Principien auszuprägen.

Wenn wir die gegebene Gleichung in der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

durch

$$f(x) = 0$$

und ihre Wurzeln durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, sowie durch $f'(x)$ ihre erste Derivierte bezeichnen, so gilt offenbar die Relation

*) Es mag hierbei bemerkt werden, dass, vom Nächstfolgenden abgesehen, in der letzten der vorgesetzten Relationen der Index t als eine von dem höchsten Exponenten n der Gleichung unabhängige ganze Zahl angesehen werden darf; allgemein gilt die Relation

$$a_n s_i + a_{n-1} s_{i+1} + \ldots + a_2 s_{n+i-2} + a_1 s_{n+i-1} + a_0 s_{n+i} = 0,$$

wie man am leichtesten zeigt, wenn man die vorgelegte Gleichung, die in der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

vorausgesetzt sein mag, mit x^i multipliciert, in das Product nach einander die n Wurzelwerthe der Gleichung einsetzt und die Substitutionsresultate addiert. Dasselbe Resultat bleibt auch für negative i gültig.

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \dots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n},$$

und anderseits

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + (n-t)a_t x^{n-t-1} + \dots$$

Die Quotienten $\frac{f(x)}{x-\alpha_1}$, etc. können aber nach allgemeinen Regeln entwickelt werden.

Wenn das Polynom

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

durch $(x-b)$ dividiert wird, so sei Q der Quotient und R der von x unabhängige Rest der Division; dann gilt die Identität

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = Q(x-b) + R$$

und man erhält für $x=b$

$$b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_n = R,$$

d. h. der Rest ist der für die Substitution $x=b$ entspringende Werth des Polynoms. Man findet durch Einsetzen dieses Werthes in die Identität

$$x^n - b^n + a_1(x^{n-1} - b^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - b^{n-2}) + \dots$$
$$+ a_{n-1}(x-b) = Q(x-b),$$

und nach der durch die Form der linksstehenden binomischen Ausdrücke leicht zu vollziehenden Division der ganzen Gleichung durch $(x-b)$

$$x^{n-1} + bx^{n-2} + b^2x^{n-3} + \dots + b^{n-1}$$
$$+ a_1(x^{n-2} + bx^{n-3} + b^2x^{n-4} + \dots + b^{n-2})$$
$$+ \dots \qquad \dots + a_{n-1} = Q,$$

oder

$$Q = x^{n-1} + (b+a_1)x^{n-2} + (b^2 + ba_1 + a_2)x^{n-3}$$
$$+ (b^3 + b^2a_1 + ba_2 + a_3)x^{n-4} + \dots$$
$$+ (b^{n-1} + b^{n-2}a_1 + b^{n-3}a_2 + \dots + a_{n-1}).$$

Das Gesetz der Coefficienten dieses Ausdrucks ist leicht zu erkennen; der erste unter ihnen ist die Einheit, jeder folgende wird durch Multiplication des vorhergehenden mit b und Hinzufügung des Coefficienten des Polynoms gebildet, welcher dem entsprechenden Gliede des Polynoms angehört.

Auf unsern Fall angewendet, giebt diess die Formeln

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_1}=x^{n-1}+(\alpha_1+a_1)x^{n-2}+(\alpha_1^2+\alpha_1 a_1+a_2)x^{n-3}+\ldots,$$

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_2}=x^{n-1}+(\alpha_2+a_1)x^{n-2}+(\alpha_2^2+\alpha_2 a_1+a_2)x^{n-3}+\ldots,$$

etc.,

und durch Addition derselben

$$f'(x)=nx^{n-1}+(s_1+na_1)x^{n-2}+(s_2+a_1 s_1+na_2)x^{n-3}+\ldots$$
$$+(s_t+a_1 s_{t-1}+a_2 s_{t-2}+\ldots+na_t)x^{n-t-1}$$
$$+\text{etc.}$$

Die Vergleichung der entsprechenden Coëfficienten in diesem Ausdruck und der ersten derivierten Gleichung

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots$$
$$+(n-t)a_t x^{n-t-1}+\text{etc.}$$

liefert die Formeln von Newton-Girard, wie oben, wenn man nur a_0 wieder herstellt.

Man bestimmt daraus sofort durch lineare Elimination den Werth von s_t als Function der Coefficienten.

Nach der Cramer'schen Regel erhält man für das System

$$\begin{array}{ll}
a_0x_1+b_0x_2+c_0x_3+\ldots & =\xi_0, \\
a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\ldots & =\xi_1, \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\ldots & =\xi_n
\end{array}$$

die Auflösungen

$$Rx_1=\begin{vmatrix}
\xi_0, & b_0, & c_0, & \ldots \\
\xi_1, & b_1, & c_1, & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\xi_n, & b_n, & c_n, &
\end{vmatrix},$$

$$Rx_2=\begin{vmatrix}
a_0, & \xi_0, & c_0, & \ldots \\
a_1, & \xi_1, & c_1, & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
a_n, & \xi_n, & c_n, &
\end{vmatrix}\ \text{etc.},$$

wenn durch R die Determinante der Coefficienten des Systems

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0, & \dots \\ a_1, & b_1, & c_1, & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_n, & b_n, & c_n, & \end{vmatrix}$$

bezeichnet wird.

Für das vorliegende System

$$\begin{array}{ll} a_0 \; s_1 & = - a_1, \\ a_1 \; s_1 + a_0 \; s_2 & = -2a_2, \\ a_2 \; s_1 + a_1 \; s_2 + a_0 \; s_3 & = -3a_3, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{t-1}s_1 + a_{t-2}s_2 + a_{t-3}s_3 + \dots + a_0 s_t & = - t a_t \end{array}$$

ist die Determinante der Coefficienten

$$R = \begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & 0, \dots & 0 \\ a_1, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & a_1, & a_0, & 0, & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{t-1}, & a_{t-2}, & a_{t-3}, & \dots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^t,$$

und man erhält somit

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & 0, & 0, \dots & 0 \\ 2a_2, & a_1, & a_0, & 0, & 0, \dots & 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, & a_0, & 0, \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ta_t, & a_{t-1}, & a_{t-2}, & a_{t-3}, & a_{t-4}, & a_1 \end{vmatrix}$$

Es ist also beispielsweise

$$s_2 = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_0 \\ 2a_2, & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^2}(a_1^2 - 2a_0a_2),$$

$$s_3 = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0 \\ 2a_2, & a_1, & a_0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_0^3}(a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + 3a_0^2a_3),$$

$$s_4 = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^4 \begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & 0 \\ 2a_2, & a_1, & a_0, & 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, & a_0 \\ 4a_4, & a_3, & a_2, & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^4}(a_1^4 - 4a_0 a_1^2 a_2 + 4a_0^2 a_1 a_3 + 2a_0^2 a_2^2 - 4a_0^3 a_4)$$

etc.

Man zieht aber aus denselben Girard'schen Formeln, wenn man sie in der Ordnung

$$\begin{aligned} a_0 s_1 + a_1 &= 0, \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 &= 0, \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 s_t + a_1 s_{t-1} + \ldots \qquad + a_{t-1} s_1 + t a_t &= 0 \end{aligned}$$

schreibt, durch Anwendung derselben Eliminationsregel diese andere Relation zur Bestimmung eines Coefficienten aus den Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln

$$a_t = (-1)^t . \frac{a_0}{1.2.3\ldots t} . \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0, & \ldots 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3, & \ldots 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & (t-1) \\ s_t, & s_{t-1}, & s_{t-2}, & s_{t-3}, & s_1 \end{vmatrix},$$

beispielsweise

$$a_3 = -\frac{a_0}{1.2.3} . \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2 \\ s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix} = -\frac{a_0}{1.2.3}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3),$$

$$a_4 = \frac{a_0}{1.2.3.4} . \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3 \\ s_4, & s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix} = \frac{a_0}{1.2.3.4}(s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 - 6s_4) \text{ etc.}$$

Jede dieser Formeln wird durch Einführung der vorigen Werthe der s_t zu einer Identität, ebenso wie jede der vorigen Formeln durch Einführung der Werthe der a_t. Die Gegeneinanderstellung der allgemeinen Formeln der s_t und a_t begründet den Gegensatz und die Analogie, welche zwischen den symmetrischen Functionen der Wurzeln und denen der Coefficienten überall besteht.

Die Berechnung jeder anderen zusammengesetzteren symmetrischen Function der Wurzeln lässt sich auf die dieser einfachsten von allen, der Summen gleicher Potenzen, zurückführen. Jede solche symmetrische Function kann, wie die Summe gleicher Potenzen in der Form

$$s_t = \Sigma \alpha_1^{\,t},$$

in der Form

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \ldots \alpha_n^{t_n}$$

ausgedrückt werden; als eine Summe von Gliedern, in welcher jedes einzelne dieselbe Anzahl verschiedener Wurzeln als Factoren enthält, deren Exponentensumme überdiess in allen Gliedern constant ist. Diese Festsetzungen liefern leicht für die symmetrischen Functionen der verschiedenen Stufen die Identitäten

$$s_{t_1} \cdot s_{t_2} = s_{t_1+t_2} + \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2},$$

$$s_{t_3} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} = \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} + s_{t_1+t_3} \cdot s_{t_2} + s_{t_2+t_3} \cdot s_{t_1},$$

$$s_{t_4} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} = \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \alpha_4^{t_4} + s_{t_1+t_4} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_2} \cdot \alpha_2^{t_3}$$
$$+ s_{t_2+t_4} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \cdot \alpha_2^{t_3} + s_{t_3+t_4} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \cdot \alpha_2^{t_2},$$

.
.
.

$$s_{t_n} \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \cdots \alpha_{n-1}^{t_{n-1}} = \Sigma \alpha_1^{t_1} \cdot \alpha_2^{t_2} \cdot \alpha_3^{t_3} \cdots \alpha_{n-2}^{t_{n-2}} \cdot \alpha_n^{t_n}$$
$$+ s_{t_1+t_n} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_2} \alpha_2^{t_3} \cdots \alpha_{n-1}^{t_{n-1}} + s_{t_2+t_n} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_3} \alpha_3^{t_4} \cdots \alpha_{n-1}^{t_{n-1}} + \cdots$$
$$+ s_{t_{n-1}+t_n} \cdot \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \cdots \alpha_{n-2}^{t_{n-2}},$$

so dass die Berechnung der symmetrischen Functionen aller höheren Stufen aus den bekannten der niederen Stufen und also zuletzt aus den bekannten Summen gleicher Potenzen hervorgeht. Man hat beispielsweise

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} = s_{t_1} \cdot s_{t_2} - s_{t_1+t_2},$$

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} = s_{t_3} (s_{t_1} \cdot s_{t_2} - s_{t_1+t_2}) - s_{t_1+t_3} \cdot s_{t_2} - s_{t_2+t_3} \cdot s_{t_1}$$
$$= s_{t_1} \cdot s_{t_2} \cdot s_{t_3} - s_{t_1+t_2} \cdot s_{t_1} - s_{t_1+t_3} \cdot s_{t_2} + 2 s_{t_1+t_2+t_3},$$

etc.

Dabei verdient es wohl der Erwähnung, dass z. B. durch die Voraussetzung $t_1 = t_2$ aus der Definition des Symbols

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3}$$

der Werth der symmetrischen Function

$$2 \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_1} \alpha_3^{t_3}$$

und für $t_1 = t_2 = t_3$ aus eben derselben der Werth von

$$2 . 3 \Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_1} \alpha_3^{t_1}$$

hervorgeht, so dass man die speciellen Formeln erhält

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_1} \alpha_3^{t_2} = \tfrac{1}{2}(s^2_{t_1} \cdot s_{t_2} - s_{2t_1} \cdot s_{t_2} - 2 s_{t_1+t_2} \cdot s_{t_1} + 2 s_{2t_1+t_2}),$$

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_1} \alpha_3^{t_1} = \tfrac{1}{6}(s^3_{t_1} - 3 s_{2t_1} s_{t_1} + 2 s_{3t_1}) \text{ etc.}$$

Im Uebrigen darf auf eine zwar alte, aber noch immer vortreffliche Darstellung dieser Theile der Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln verwiesen werden, in M. Hirsch's „Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen.“ (I. 1809. p. 1—55.)

Abel Transon hat ein elegantes Verfahren gegeben, die symmetrischen Functionen zu entwickeln, an welches sich zugleich die weiteren Betrachtungen anschliessen.*) Die folgende kurze Darstellung desselben beruht mit der oben gegebenen Ableitung der Newton-Girard'schen Formeln auf denselben dort näher erörterten Voraussetzungen.

Repräsentiert das Symbol $f(x)$ die Form

$$(a_0, a_1, \ldots a_n \between x_1, 1)^n$$

und $f'(x)$ ihren ersten Differentialquotienten, so ist für eine beliebige ganze Function $\varphi(x)$

$$\frac{f'(x) . \varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{x - \alpha_1} + \frac{\varphi(x)}{x - \alpha_2} + \frac{\varphi(x)}{x - \alpha_3} + \ldots + \frac{\varphi(x)}{x - \alpha_n}$$

$$= \varphi(x) + \frac{x^{n-1}}{f(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi(\alpha_i) + \ldots \right\},$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von x ist, deren Grad um eine Einheit geringer ist, als der von φ.

---

*) Man vergl. „Nouvelles Annales de Mathém.“ t. IX oder „Archiv der Mathematik und Physik“ Bd. XVI. p. 471.

Um also die symmetrische Function

$$\overset{1}{\underset{n}{\Sigma_i}}\, \varphi(\alpha_i)$$

zu erhalten, entwickelt man

$$\frac{f'(x)\,\varphi(x)}{f(x)}$$

nach fallenden Potenzen von x und nimmt den Coefficienten von x^{-1}.

Man gelangt zu der symmetrischen Function zweiter Stufe

$$\overset{1}{\underset{n}{\Sigma_{i,j}}}\, \varphi(\alpha_i, \alpha_j),$$

indem man aus $f(x)$ durch Division mit $\widehat{(x-\alpha_1)}$ das Polynom $f_1(x)$ bildet, dessen Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sind, und den Coefficienten von x_1^{-1} in der Entwickelung von

$$\frac{f_1'(x_1)\,.\,\varphi(\alpha_1, x_1)}{f_1(x_1)}$$

bildet. Desgleichen erhält man für die Function

$$\overset{1}{\underset{n}{\Sigma_{i,j,k}}}\, \varphi(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$$

den Coefficienten von x_2^{-1} in der Entwickelung von

$$\frac{f_2'(x_2)\,.\,\varphi(\alpha_1, \alpha_2, x_2)}{f_2(x_2)},$$

wo

$$f_2(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)}$$

ist, etc.

Stellt man aber

$$f'(x)\,.\,\varphi(x)$$

durch

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots \quad + A_t x^{m-t}$$

dar, wobei $\varphi(x)$ vom Grade t ist, während

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots$$

ist und

$$\frac{f'(x)\,.\,\varphi(x)}{f(x)} = A_0' x^{m-n} + A_1' x^{m-n-1} + \ldots \quad + A_t' x^{m-n-t},$$

so kann man diess Verfahren in eine sehr einfache Form bringen und zugleich ein wichtiges allgemeines Princip darin ausprägen; denn man hat nach den gemachten Voraussetzungen

$$A_t' = \frac{1}{a_0^{t+1}} \begin{vmatrix} a_0, & 0 & , 0 & , \ldots & A_0 \\ a_1, & a_0 & , 0 & , & A_1 \\ a_2, & a_1 & , a_0 & , & A_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_t, & a_{t-1}, & a_{t-2}, & & A_t \end{vmatrix}.$$

Man findet alsdann die symmetrische Function $\varphi(x)$ vom Grade t, wenn man den Coefficienten A_t' bestimmt, für welchen

$$m - n - t = -1$$

ist.

Für

$$\varphi(x) = 1$$

erhält man in

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

die Summe der gleichen Potenzen der Wurzeln; also wegen

$$A_0 = m a_0,\ A_1 = (m-1) a_1,\ A_2 = (m-2) a_2, \ldots$$

$$A_t' = \frac{1}{a_0^{t+1}} \begin{vmatrix} a_0, & 0 & , 0 & , \ldots & m a_0 \\ a_1, & a_0 & , 0 & , & (m-1) a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_t, & a_{t-1}, & a_{t-2}, & \ldots & (m-t) a_t \end{vmatrix},$$

d. i.

$$A_t' = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^{t+1} \begin{vmatrix} 0, & a_0, & 0 & , \ldots & 0 \\ a_1, & a_1, & a_0 & , & 0 \\ 2a_2, & a_2, & a_0 & , & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ t a_t, & a_t, & a_{t-1}, & \ldots & a_1 \end{vmatrix},$$

welches durch Unterdrückung der Columne $a_0, a_1, a_2, \ldots a_t$ in die Relation übergeht, die im Anfang des Artikels gegeben ist, nämlich in

$$A_t' = s_t = -\left(\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1, & a_0 & , 0 & , \ldots & 0 \\ 2a_2, & a_1 & , a_0 & , \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ t a_t, & a_{t-1}, & a_{t-2}, & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

7.

Die Berechnung solcher Functionen nach den vorher gegebenen allgemeinen Formeln aus den Summen der gleichen Potenzen etc. in Ausdrücken der Coefficienten der Gleichung bliebe aber immer eine Arbeit von erschreckender Weitläufigkeit, wenn nicht gewisse merkwürdige Eigenschaften der symmetrischen Functionen dieselbe wesentlich abzukürzen erlaubten, indem sie die Berechnung aller derjenigen Glieder ersparen, welche im Endresultat wieder verschwinden, während sie in den Zwischenrechnungen einen höchst beschwerlichen Ballast bilden; man verdankt die Kenntniss der hauptsächlichsten unter ihnen Abel Transon, Cayley und Brioschi. Sie sind hier um so wichtiger, als sie mit dem Späteren in sehr naher überall hervortretender Verbindung stehen.

Die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades sei in der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \quad + a_n y^n = 0$$

vorausgesetzt, so dass

$$a_0 = 1$$

oder die ganze frühere Gleichung mit a_0 dividiert und der Quotient jedes Coefficienten derselben durch a_0, durch den gleichnamigen Coefficienten der jetzigen Gleichung, ersetzt gedacht ist.

Alsdann ist die allgemeine symmetrische Function der Wurzeln durch das Symbol

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \dots,$$

und insofern sie eine Function der Coefficienten der Gleichung ist, durch das analoge

$$\Sigma C a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} a_3^{\tau_3} \dots$$

dargestellt, so dass man hat

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \dots = \Sigma C a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} a_3^{\tau_3} \dots$$

Für die allgemeine symmetrische Function der Wurzeln gilt aber der Satz: Die Function der Coefficienten, welche die besagte symmetrische Function der Wurzeln repräsentiert, ist von einem Grade, welcher mit dem höchsten der in der letzteren auftretenden Exponenten der Wurzeln übereinstimmt,

und zwischen den Indices i der einzelnen Coefficienten und den Exponenten τ_i, mit denen sie in ein Glied derselben eintreten, besteht zu dem Exponenten t der symmetrischen Function die Relation

$$\Sigma i \tau_i = \Sigma t_j,$$

wobei sich die Summe links auf alle Indices und Exponenten bezieht, die in irgend ein Glied der Coefficientenentwickelung der symmetrischen Function der Wurzeln eingehen, die Summe rechts aber auf die Exponenten dieser letzteren selbst.

Es liegt in der Natur dieser Relation, dass der Coefficient a_0 derselben fremd ist, weil das demselben entsprechende Glied der Summe $\Sigma i \tau_i$ den Werth Null hat. Die Coefficientenentwickelung würde aber offenbar bei der Wiedereinführung dieses Coefficienten die Form

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \ldots = \left(\frac{1}{a_0}\right)^t \Sigma C a_0^{\tau_0} a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} \ldots$$

annehmen, in welcher t den grössten der Exponenten t_i bezeichnet, welche in der symmetrischen Function der Wurzeln auftreten.

Man hat jene Summe der Producte aus den Indices in die bezüglichen Exponenten eines Gliedes der Function

$$\Sigma i \tau_i = \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \ldots + n\tau_n,$$

wegen der hervorragenden Rolle, die sie in allen verwandten Untersuchungen spielt, mit einem besondern Namen bezeichnet: sie heisst das Gewicht der Function.

Jede symmetrische Function der Wurzeln ist darnach als Function der Coefficienten der Gleichung, abgesehen von einer als gemeinschaftlicher Factor auftretenden Potenz von a_0, in allen ihren Gliedern von demselben der Exponentensumme der symmetrischen Function Σt_j gleichen Gewicht, sie ist überdiess homogen und von dem Grade des höchsten unter diesen Exponenten der symmetrischen Function.

Schon die Betrachtung der früher für die Summen gleicher Potenzen gegebenen Formeln kann zur Bestätigung dieses Satzes dienen, dessen allgemeiner Beweis übrigens ohne Schwierigkeit ist. Man fand z. B.

$$s_4 = \Sigma \alpha_1^4 = \frac{1}{a_0^4}(a_1^4 - 4a_0 a_1^2 a_2 + 4a_0^2 a_1 a_3 + 2a_0^2 a_2^2 - 4a_0^3 a_4),$$

eine homogene Function vom Grade und vom Gewicht vier, weil bei der Summe gleicher Potenzen t und Σt_j identisch sind.

Der Werth des Satzes für die Entwickelung beliebiger symmetrischer Functionen der Wurzeln ist leicht zu erkennen; man ist durch ihn in den Stand gesetzt, die allgemeine Form der Coefficientenentwickelung, welche einer solchen entspricht, unmittelbar anzugeben, so dass nur übrig bleibt, die numerischen Coefficienten, welche die einzelnen Glieder derselben behaften, zu bestimmen. Sei z. B. gefordert, die symmetrische Function

$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2^2$$

zu entwickeln, so ist der Grad der Entwickelung $= 3$, ihr Gewicht $= 5$; sie muss demnach bis auf einen gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{a_0^3}$ von der Form sein

$$A a_0^2 a_5 + B a_0 a_1 a_4 + C a_0 a_2 a_3 + D a_1 a_2^2 + E a_1^2 a_3,$$

für welche überdiess die Coefficienten A, B, C, D, E leicht zu ermitteln sind.

Der Beweis des Satzes fliesst aus der einfachen Bemerkung, dass die Coefficienten der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n = 0$$

in Bezug auf jede einzelne ihrer Wurzeln lineare Functionen sind, so dass man setzen kann

$$a_t = M_r^{(t)} \alpha_r + N_r^{(t)},$$

wenn mit a_t der betrachtete Coefficient, mit α_r die gewählte Wurzel und mit $M_r^{(t)}$, $N_r^{(t)}$ die Functionen der andern Wurzeln bezeichnet werden, welche respective mit dem Factor α_r und ohne denselben in den Ausdrück des Coefficienten eintreten. Durch Substitution erhält man alsdann

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \dots = \Sigma C a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} a_3^{\tau_3} \dots a_n^{\tau_n}$$
$$= \Sigma C . \left\{ M_r^{(1)} \alpha_r + N_r^{(1)} \right\}^{\tau_1} . \left\{ M_r^{(2)} \alpha_r + N_r^{(2)} \right\}^{\tau_2} . \dots \left\{ M_r^{(2)} \alpha_r + N_r^{(2)} \right\}^{\tau_n},$$

so dass der grösste Exponent der beliebigen Wurzel α_r, welcher mit dem grössten unter den Exponenten der symmetrischen Function der Wurzeln nothwendig identisch sein muss, durch die Summe der Exponenten

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau^n$$

repräsentiert wird. Die symmetrische Function der Wurzeln ist daher homogen und vom Grade t, des grössten unter ihren Exponenten, in den Coefficienten.

Wenn aber die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sämmtlich den $k$fachen Werth annehmen sollen, so müssen ihre Coefficienten die Werthe

$$ka_1,\ k^2a_2,\ k^3a_3,\ \dots$$

respective annehmen, und in die hier betrachtete symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \dots$$

würde die Potenz

$$k^{t_1+t_2+t_3+\dots}$$

als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder eintreten. Das erstere hat aber in dem bereits als homogene Function der Coefficienten vom Grade t erkannten Ausdruck

$$\Sigma C a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} \dots a_n^{\tau_n}$$

und seinem Aequivalent

$$\Sigma C \left\{ M_r^{(1)} \alpha_r + N_r^{(1)} \right\}^{\tau_1} . \left\{ M_r^{(2)} \alpha_r + N_r^{(2)} \right\}^{\tau_2} \dots\dots \left\{ M_r^{(n)} \alpha_r + N_r^{(n)} \right\}^{\tau_n}$$

die Folge, dass der Factor

$$k^{\tau_1+2\tau_2+3\tau_3 \dots + n\tau_n}$$

in allen Gliedern hinzutritt.

Soll also die Identität desselben mit

$$\Sigma \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \alpha_3^{t_3} \dots ,$$

nicht gestört werden, so muss man haben

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots = \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \dots + n\tau_n,$$

d. h. die Function der Coefficienten ist nothwendig in allen ihren Gliedern vom Gewicht Σt_j.

Dieser Satz erscheint für sich allein ausreichend zur Ermittelung beliebiger symmetrischer Functionen, wenn man eine zur Bestimmung der in dieselben eintretenden numerischen Coefficienten hinreichende Anzahl von Gleichungen mit bekannten Wurzeln zuzieht.

So können die numerischen Coefficienten der symmetrischen Function

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2 = Aa_0^2a_5 + Ba_0a_1a_4 + Ca_0a_2a_3 + Da_1a_2^2 + Ea_1^2a_3$$

mittelst der Anwendung dieses Ausdrucks auf die fünf Gleichungen

$$\begin{array}{lll} x^2-2x+1=0, & \text{oder} & (x-1)^2 \quad =0; \\ x^3-x+1=0, & \text{-} & (x-1)^2(x-1)=0; \\ x^3-3x^2+3x-1=0, & \text{-} & (x-1)^3 \quad =0; \\ x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0, & \text{-} & (x-1)^4 \quad =0; \\ x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1=0, & \text{-} & (x-1)^5 \quad =0 \end{array}$$

bestimmt werden; da die betrachtete symmetrische Function für diese Gleichungen die mit ihnen in derselben Zeile der folgenden Tabelle zugleich mit ihren bezüglichen Coefficienten vereinigten Werthe haben,

Gleichung.	Wurzeln.	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2$	Coefficienten.					
			a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$0=x^2-2x+1$	$+1,+1$	2	1	—2	1	0	0	0
$0=x^3-x^2-x+1$	$+1,+1-1$	2	1	—1	—1	1	0	0
$0=x^3-3x^2+3x-1$	$+1,+1,+1$	6	1	—3	3	—1	0	0
$0=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$	$+1,+1,+1,+1$	12	1	—4	6	—4	1	0
$0=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$	$+1,+1,+1,+1,+1$	20	1	—5	10	-10	5	—1

so erhält man die fünf Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= -2D, \\ 2 &= -C-D+E, \\ 6 &= -3C-27D-9E, \\ 12 &= -4B-24C-144D-64E, \\ 20 &= -A-25B-100C-500D-250E, \end{aligned}$$

und daraus die Werthe

$$D=-1,\ E=+2;\ C=+1,\ B=-5,\ A=5,$$

so dass man hat

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2 = 5a_0^2a_5 - 5a_0a_1a_4 + a_0a_2a_3 - a_1a_2^2 + 2a_1^2a_3.$$

Zu solcher Berechnung führt aber auch eine von Brioschi angegebene Eigenschaft der symmetrischen Functionen, die noch entwickelt werden mag.

Jede symmetrische Function φ der Wurzeln einer Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots \quad + a_ny^n = 0$$

genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{da_i} + da_1\frac{d\varphi}{da_{i+1}} + a_2\frac{d\varphi}{da_{i+2}} + \dots \ + a_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n} + i\frac{d\varphi}{ds_i} = 0.$$

Der Beweis, welchen der Entdecker von derselben giebt, ist folgender: Die symmetrische Function φ der Wurzeln ist eine Function der Summen der gleichen Potenzen derselben, und diese sind Functionen der Coefficienten, sowie diese letzteren Functionen der ersteren Potenzensummen. Man hat also

$$\frac{d\varphi}{ds_i} = \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{ds_i} + \frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{ds_i} + \dots + \frac{d\varphi}{da_n}\frac{da_n}{ds_i} \text{ und}$$

$$\frac{da_j}{ds_i} = \frac{da_j}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{ds_i} + \frac{da_j}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{ds_i} + \dots + \frac{da_j}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{ds_i};$$

überdiess ist aber nach dem Zusammenhang der Coefficienten mit den einfachsten symmetrischen Functionen der Wurzeln oder nach der Zerlegung der Gleichung in binòmische Factoren

$$a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots$$

$$\frac{da_j}{d\alpha_k} = -(a_{j-1} + a_{j-2}\alpha_k + a_{j-3}\alpha_k^2 + \dots + a_1 \alpha_k^{j-2} + \alpha_k^{j-1}),$$

weil $\frac{da_j}{d\alpha_k}$ der mit umgekehrten Zeichen genommene Coefficient des Gliedes x^{n-j} in der Entwickelung

$$\frac{(a_0, \dots \between x, 1)^n}{(x - \alpha_j)}$$

ist.

Daraus findet man

$$-\frac{da_j}{ds_i} = a_{j-1}\Sigma\frac{d\alpha_h}{ds_i} + a_{j-2}\Sigma\alpha_h\frac{d\alpha_h}{ds_i} + \dots + a_{j-i}\Sigma\alpha_h^{i-1}\frac{d\alpha_h}{ds_i} \dots,$$

wo sich das Summenzeichen auf alle ganzen Werthe von k von 1 bis n bezieht, oder auch

$$-\frac{da_j}{ds_i} = a_{j-1}\frac{ds_1}{ds_i} + \tfrac{1}{2}a_{j-2}\frac{ds_2}{ds_i} + \dots + \frac{1}{i}a_{j-i}\cdot\frac{ds_i}{ds_i} + \dots + \frac{1}{j}\frac{ds_j}{ds_i}.$$

Daraus aber ergiebt sich für

$$k > i \text{ sofort } \frac{da_j}{ds_i} = -\frac{1}{i}a_{j-i},$$

$$k = i \quad - \quad \frac{da_i}{ds_i} = -\frac{1}{i},$$

$$k < i \quad - \quad \frac{da_i}{ds_i} = 0,$$

so dass die durch die gegenseitige Abhängigkeit der φ, s, a gesetzte Gleichung

$$\frac{d\varphi}{ds_i} = \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{ds_i} + \frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{ds_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{da_n}\frac{da_n}{ds_i} = 0$$

in die behauptete übergeht

$$\frac{d\varphi}{da_i} + a_1\frac{d\varphi}{da_{i+1}} + a_2\frac{d\varphi}{da_{i+2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n} + i\frac{d\varphi}{ds_i} = 0.$$

Diese Differentialgleichung liefert Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der in die symmetrische Function eingehenden numerischen Coefficienten, vorausgesetzt, dass die einfacheren symmetrischen Functionen bereits bekannt seien. An einem Beispiele mag ihre Anwendung in dieser Richtung dargelegt werden.

Die symmetrische Function

$$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3^2$$

muss in Function der Coefficienten vom Grade 4 und vom Gewicht 9 sein, ihre litterale Form ist daher nothwendig

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3^2 = {} & Aa_0^3a_9 + Ba_0^2a_1a_8 + Ca_0^2a_2a_7 + Da_0^2a_3a_6 + Ea_0^2a_4a_5 + Fa_0a_1^2a_7 \\ & + Ga_0a_1a_2a_6 + Ha_0a_1a_3a_5 + Ia_0a_1a_4^2 + Ka_0a_2^2a_5 + La_0a_2a_3a_4 \\ & + Ma_0a_3^3 + Na_1^3a_6 + Pa_1^2a_2a_5 + Qa_1^2a_3a_4 + Ra_1a_2^2a_4 \\ & + Sa_1a_2a_3^2 + Ta_2^3a_3.\end{aligned}$$

Sie ist anderseits in Function der Summen gleicher Potenzen

$$= s_4s_3s_2 - s_7s_2 - s_6s_3 - s_5s_4 + 2s_9.$$

Nach dem Brioschi'schen Satze erhält man für $i = 9, 8, 7 \ldots 1$ die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{da_9} + 9\frac{d\varphi}{ds_9} = 0, \qquad 1)$$

$$\frac{d\varphi}{da_8} + a_1\frac{d\varphi}{da_9} + 8\frac{d\varphi}{ds_8} = 0, \qquad 2)$$

$$\frac{d\varphi}{da_7} + a_1\frac{d\varphi}{da_8} + a_2\frac{d\varphi}{da_9} + 7\frac{d\varphi}{da_7} = 0, \qquad 3)$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{da_1} + a_1\frac{d\varphi}{da_2} + a_2\frac{d\varphi}{da_3} \\ &+ a_3\frac{d\varphi}{da_4} + a_4\frac{d\varphi}{da_5} + a_5\frac{d\varphi}{da_6} + a_6\frac{d\varphi}{da_7} + a_7\frac{d\varphi}{da_8} + a_8\frac{d\varphi}{da_9} + \frac{d\varphi}{da_1} = 0. \qquad 9)\end{aligned}$$

Nach der gegebenen litteralen Form ist aber für $a_0=1$

$$\frac{d\varphi}{da_9}=A, \qquad \frac{d\varphi}{da_8}=Ba_1,$$

$$\frac{d\varphi}{da_7}=Ca_2+Fa_1^2, \qquad \frac{d\varphi}{da_6}=Da_3+Ga_1a_2+Na_1^3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_5}=Ea_4+Ha_1a_3+Ka_2^2+Pa_1^2a_2,$$

$$\frac{d\varphi}{da_4}=Ea_5+2Ia_1a_4+La_2a_3+Qa_1^2a_3+Ra_1a_2^2,$$

$$\frac{d\varphi}{da_3}=Da_6+Ha_1a_5+La_2a_4+3Ma_3^2+Qa_1^2a_4+2Sa_1a_2a_3+Ta_2^3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_2}=Ca_7+Ga_1a_6+2Ka_2a_5+La_3a_4+Pa_1^2a_5+2Ra_1a_2a_4+Sa_1a_3^2 \\ +3Ta_2^2a_3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}=Ba_8+2Fa_1a_7+Ga_2a_6+Ha_3a_5+Ia_4^2+3Na_1^2a_6+2Pa_1a_2a_5 \\ +2Qa_1a_3a_4+Ra_2^2a_4+Sa_2a_3^2;$$

und man hat überdiess

$$\frac{d\varphi}{ds_9}=2, \quad \frac{d\varphi}{ds_8}=0, \quad \frac{d\varphi}{ds_7}=-s_2, \quad \frac{d\varphi}{ds_6}=-s_3, \quad \frac{d\varphi}{ds_5}=-s_4,$$

$$\frac{d\varphi}{ds_3}=s_4s_2-s_6, \quad \frac{d\varphi}{ds_2}=s_4s_3-s_7, \quad \frac{d\varphi}{ds_1}=0.$$

Die ersten fünf der obigen Differentialgleichungen werden somit durch Einsetzen zu folgenden

$$A+18=0, \qquad Ba_1+Aa_1=0,$$

$$Ca_2+Fa_1^2+Ba_1^2+Aa_2-7(a_1^2-2a_2)=0,$$

$$Da_3+Ga_1a_2+Na_1^3+a_1(Ca_2+Fa_1^2)+Ba_1a_2+Aa_3 \\ +6(a_1^3-3a_1a_2+3a_3)=0,$$

$$Ea_4+Ha_1a_3+Ka_2^2+Pa_1^2a_2+a_1(Da_3+Ga_1a_2+Na_1^3)+a_2(Ca_2+Fa_1^2) \\ +Ba_1a_3+Aa_4-5(a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2-4a_4)=0,$$

und liefern die Bedingungsgleichungen

$$A+18=0, \quad B+A=0, \quad C+A+14=0, \quad F+B-7=0,$$
$$D+A+18=0, \quad G+C+B-18=0, \quad N+F+6=0,$$
$$E+A+20=0, \quad H+D+B-20=0, \quad K+C-10=0,$$
$$P+G+F+20=0, \quad N-5=0,$$

und aus diesen die Werthe

$$A=-18, \quad B=+18, \quad C=+4, \quad F=-11, \quad D=0,$$
$$G=-4, \quad N=+5, \quad E=-2, \quad H=+2, \quad K=+6,$$
$$P=-5.$$

Die noch fehlenden Werthe der Coefficienten I, L, M, Q, R, S, T lassen sich auf verschiedene Weise aus den vier letzten Differentialgleichungen bestimmen; die letzte derselben, welche wegen

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = 0$$

den Vorzug verdient, wird

$$\begin{aligned}&Ba_8+2Fa_1a_7+Ga_2a_6+Ha_3a_5+Ia_4^2+3Na_1^2a_6+2Pa_1a_2a_5\\&\quad+2Qa_1a_3a_4+Ra_2^2a_4+Sa_2a_3^2+a_1(Ca_7+Ga_1a_6+2Ka_2a_5\\&\quad+La_3a_4+Pa_1^2a_5+2Ra_1a_2a_4+Sa_1a_3^2+3Ta_2^2a_3)\\&\quad+a_2(Da_6+Ha_1a_5+La_2a_4+3Ma_3^2+Qa_1^2a_4+2Sa_1a_2a_3+Ta_2^3)\\&\quad+a_3(Ea_5+2Ia_1a_4+La_2a_3+Qa_1^2a_3+Ra_1a_2^2)\\&\quad+a_4(Ea_4+Ha_1a_3+Ka_2^2+Pa_1^2a_2)+a_5(Da_3+Ga_1a_2+Na_1^3)\\&\quad+a_6(Ca_2+Fa_1^2)+Ba_1a_7+Aa_8=0,\end{aligned}$$

und liefert zunächst in den Bedingungsgleichungen

$$B+A=0,\quad B+C+2F=0,\quad C+D+G=0,\quad D+E+H=0,$$
$$F+G+3N=0,\quad K+P=1,\quad N+P=0$$

Bestätigungen der vorhergefundenen Werthe; sodann aber die neuen Bedingungsgleichungen

$$E+I=0,\quad L+2Q=-6,\quad L+R=-6,$$
$$L+3M+S=0,\quad Q+2R=5,\quad Q+S=0,$$
$$R+2S+3T=0,\quad T=0,$$

und durch dieselben die Werthe

$$I=+2,\quad L=-8,\quad M=+3,\quad Q=+1,$$
$$R=+2,\quad S=-1,\quad T=0;$$

so dass die betrachtete symmetrische Function nun vollständig entwickelt in der Form erscheint

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3^2=&-18a_0^3a_9+18a_0^2a_1a_8+4a_0^2a_2a_7-2a_0^2a_4a_5\\&-11a_0a_1^2a_7-4a_0a_1a_2a_6+2a_0a_1a_3a_5+2a_0a_1a_4^2\\&+6a_0a_2^2a_5-8a_0a_2a_3a_4+3a_0a_3^3\\&+5a_1^3a_6-5a_1^2a_2a_5+a_1^2a_3a_4+2a_1a_2^2a_4\\&-a_1a_2a_3^2.\end{aligned}$$

Zugleich erlauben die Differentialgleichungen der symmetrischen Function φ, dieselbe in der Form einer Determinante darzustellen, welche bemerkenswerth ist, obgleich sie sich nicht zur Vereinfachung der Berechnung eignet. Bezeichnet man nämlich die Summe der Exponenten in der symmetrischen Function durch T, so wird die Gleichung

$$a_1\frac{d\varphi}{da_1}+2a_2\frac{d\varphi}{da_2}+3a_3\frac{d\varphi}{da_3}+\ldots+Ta_T\frac{d\varphi}{da_T}-T.\varphi=0$$

von der symmetrischen Function ihrer Natur nach erfüllt und man kann zwischen ihr und jenen Differentialgleichungen die Grössen

$$\frac{d\varphi}{da_1},\ \frac{d\varphi}{da_2}\ldots\ \frac{d\varphi}{da_T}$$

linear eliminieren, d. h. man erhält

$$(-1)^t . T . \varphi = \begin{vmatrix} 0 \;, & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & \ldots & Ta_T \\ 1.\frac{d\varphi}{ds_1}, & 1\;, & a_1, & a_2, & \ldots & a_{T-1} \\ 2.\frac{d\varphi}{ds_2}, & 0\;, & 1\;, & a_1, & \ldots & a_{T-2} \\ 3.\frac{d\varphi}{ds_3}, & 0\;, & 0\;, & 1\;, & \ldots & a_{T-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ T.\frac{d\varphi}{ds_t}, & 0\;, & 0\;, & 0\;, & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

8.

In einer eigenthümlichen Zusammenfassung erscheint die Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln in der von Borchardt bewiesenen Existenz einer erzeugenden Function, aus welcher alle symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung als Theile ihrer Entwickelung hervorgehen.*)

Der Ausdruck

$$T = \Sigma \frac{1}{\alpha_1'-\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2'-\alpha_2} \cdots \frac{1}{\alpha_n'-\alpha_n},$$

in welchem die Summierung auf alle jene Glieder sich erstreckt, welche aus dem geschriebenen dadurch entstehen, dass von den beiden Reihen

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n'; \; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

die eine unverändert bleibt, während die andere auf alle mögliche Arten permutiert wird, welcher also in Bezug auf beide Reihen von Grössen symmetrisch ist, liefert durch seine Entwickelung nach fallenden Potenzen von

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

jene einfachsten Typen von ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n$$

einer vorausgesetzten Gleichung n^{ten} Grades

---

*) „Monatsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin", März 1855. „Crelle's Journal", Bd. LIII, p. 193.

$$f = 0,$$

welche aus einem einzigen Product ganzer Potenzen dieser Grössen durch Permutation hervorgehen und bekanntlich alle ganzen symmetrischen Functionen von

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n$$

additiv zu bilden erlauben. Um alle diese symmetrischen Functionen der Wurzeln in Gliedern der Coefficienten der Gleichung auszudrücken, ist nichts mehr nöthig, als diese erzeugende Function so zu transformieren, dass in ihr nicht mehr die Wurzeln, sondern die Coefficienten der gedachten Gleichung enthalten sind. Diess gelingt durch die Beziehung derselben zu den beiden Determinanten

$$D = \Sigma \pm \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_1)^2} \cdot \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_2)^2} \cdots \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_n)^2},$$

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_1)} \cdot \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_2)} \cdots \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_n)},$$

d. i.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(\alpha_3'-\alpha_1)^2} & \cdots & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_1)^2} \\ \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_2)^2} & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_2)^2} & & \cdots & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_2)^2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_n)^2} & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_n)^2} & & \cdots & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_n)^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_1)}, & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_1)}, & \cdots & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_1)} \\ \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_2)}, & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_2)}, & & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_2)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{(\alpha_1'-\alpha_n)}, & \frac{1}{(\alpha_2'-\alpha_n)}, & & \frac{1}{(\alpha_n'-\alpha_n)} \end{vmatrix},$$

welche durch

$$D = T . \Delta$$

ausgedrückt wird.

Der Ausdruck

$$(f\alpha_1', f\alpha_2', f\alpha_3' \ldots f\alpha_n')^2 D$$

ist nämlich eine ganze Function von

$$\alpha_1', \ldots \alpha_n', \alpha_1, \ldots \alpha_n,$$

die ebensowohl durch das Product aller Differenzen zwischen

$$\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n',$$

als auch durch das Product aller Differenzen zwischen

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

theilbar ist. Nach der Division durch beide Producte bleibt als Quotient eine ganze Function, deren $(n+1)^{n+1}$ specielle Werthe für das Zusammenfallen je einer der Grössen

$$\alpha_1', \ldots \alpha_n'$$

mit je einer der Grössen

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n$$

bestimmt werden können, so dass nach der auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Interpolationsformel von Lagrange der allgemeine Werth des Ausdrucks gebildet wird. Dadurch erhält man

$$D = T.(-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \frac{\pi(\alpha_1', \ldots \alpha_n').\pi(\alpha_1, \ldots \alpha_n)}{(f\alpha_1'.f\alpha_2' \ldots f\alpha_n')},$$

d. i. $D = T.\triangle$, wo $\pi(\alpha_1', \ldots \alpha_n')$ und $\pi(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ das Product aller aus

$$\alpha_1', \ldots \alpha_n'$$

und respective

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n$$

gebildeten Differenzen repräsentieren, jede so genommen, dass der grössere Index des α' dem Minuenden angehört.

Die Determinante D geht aber aus der Determinante $\triangle$ hervor durch aufeinanderfolgende Differentation nach sämmtlichen Variabeln

$$\alpha_1', \ldots \alpha_n$$

und man hat daher

$$T = (-1)^n \frac{f\alpha_1'.f\alpha_2' \ldots f\alpha_n'}{\pi(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n')} . \frac{\partial}{d\alpha_1'} . \frac{\partial}{d\alpha_2'} \ldots \frac{\partial}{d\alpha_n} \left(\frac{\pi(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n')}{f\alpha_1'.f\alpha_2' \ldots f\alpha_n'} \right)$$

als den Ausdruck der erzeugenden Function. Dieser Ausdruck kann als die symbolische Zusammenfassung der Rechnungsoperationen angesehen werden, welche der bis auf Waring*) allein betretene Weg — die Zurückführung der

*) „Meditationes algebraicae."

zusammengesetzten symmetrischen Functionen der Wurzeln auf die Summen gleicher Potenzen und die Darstellung dieser letzteren durch die Coefficienten der Gleichung — nöthig machte.

Für die Gleichung zweiten Grades mit den Coefficienten a_1, a_2 und den Wurzeln α_1, α_2 erhält man einerseits

$$T = \Sigma \frac{1}{\alpha_1' - \alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_2' - \alpha_2} = \frac{1}{(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_2' - \alpha_2)} + \frac{1}{(\alpha_1' - \alpha_2)(\alpha_2' - \alpha_1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha_1' \alpha_2'} \left\{ 1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1'} + \frac{1}{\alpha_2'}\right) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\left(\frac{1}{\alpha_1'^2} + \frac{1}{\alpha_2'^2}\right) + \dots \right\},$$

anderseits

$$T = (-1)^2 \frac{f\alpha_1' \cdot f\alpha_2'}{\pi(\alpha_1', \alpha_2')} \cdot \frac{\partial}{d\alpha_1'} \cdot \frac{\partial}{d\alpha_2'} \left(\frac{\pi(\alpha_1', \alpha_2')}{f\alpha_1' \cdot f\alpha_2'} \right)$$

$$= \frac{f\alpha_1' \cdot f\alpha_2'}{\alpha_1' - \alpha_2'} \cdot \frac{d}{d\alpha_1'} \cdot \frac{d}{d\alpha_2'} \left(\frac{\alpha_1' - \alpha_2'}{f\alpha_1' \cdot f\alpha_2'} \right)$$

$$= \frac{2\alpha_1'\alpha_2' + a_1(\alpha_1' + \alpha_2') + 2a_2}{(\alpha_1'^2 + a_1\alpha_1' + a_2)(\alpha_2'^2 + a_1\alpha_2' + a_2)},$$

so dass man bei der Entwickelung nach absteigenden Potenzen von α_1', α_2' und dann durch Vergleichung mit dem Vorigen die symmetrischen Functionen der Wurzeln in Function der Coefficienten erhält. Cayley merkt an, dass im Allgemeinen die linke Seite der Borchardt'schen Formel

$$= A_0 + A_1 \Sigma\alpha_1 . \Sigma\alpha_1' + A_1^{(2)} . \Sigma\alpha_1^2 . \Sigma\alpha_1'^2 + A_{12}\, \Sigma\alpha_1\alpha_2 . \Sigma\alpha_1'\alpha_2' + \dots$$

ist, wo $A_0 = 1.2.3 \dots n$ ist und A_1, $A_1^{(2)}$, $A_{12} \dots$ die Quotienten sind, die die Gliederanzahl der damit behafteten symmetrischen Functionen in das Product

$$1.2.3 \dots n$$

hervorbringt. In Folge dessen würde ihre Entwickelung die sämmtlichen symmetrischen Functionen der Wurzeln in Gliedern der Coefficienten ergeben.*)

*) Die Anwendung der angedeuteten Betrachtungen zu dem allgemeinen Nachweise, dass jede symmetrische Function der Wurzeln eine ganze und ganzzahlige Function der Exponenten derselben ist, und einiges Andere möge man in der Originalabhandlung des gelehrten Autors a. a. O. nachlesen.

Für die Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln hat man die erzeugende Function in der Form

$$\frac{1}{f\alpha_1'} \cdot \frac{\partial f\alpha_1'}{d\alpha_1'}.$$

Die Formeln des 6. Artikels

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & , a_0 & , 0 & , \ldots 0 \\ 2a_2 & , a_1 & , a_0 & , \quad 0 \\ 3a_3 & , a_2 & , a_1 & , \quad 0 \\ . & . & . & \quad . \\ . & . & . & \quad . \\ . & . & . & \quad . \\ ta_t & , a_{t-1}, & a_{t-2}, & \ldots a_1 \end{vmatrix}$$

und

$$a_t = (-1)^t \frac{a_0}{1.2.3\ldots t} \cdot \begin{vmatrix} s_1, & 1 & , 0 & , 0 & , \ldots 0 \\ s_2, & s_1 & , 2 & , 0 & , \quad 0 \\ s_3, & s_2 & , s_1 & , 3 & , \quad 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & (t-1) \\ s_t, & s_{t-1}, & s_{t-2}, & s_{t-3}, & s_1 \end{vmatrix}$$

erläutern die Art von Reciprocität, welche zwischen symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung und symmetrischen Functionen ihrer Coefficienten besteht und erlauben, die ausführliche Entwickelung einer entsprechenden Theorie dieser letzteren zu umgehen. So wie schon die Algebra von Meier Hirsch Tafeln über die symmetrischen Functionen der Wurzeln für die Gleichungen aller Grade bis zum zehnten und die Methode ihrer Berechnung enthält, so hat Cayley im 147. Bande der „Philosophical Transactions“ p. 489 (1857) ihnen Tafeln zugesellt, welche die Ausdrücke der Potenzen und Producte der Coefficienten in symmetrischen Functionen der Wurzeln giebt. Beide Systeme von Tafeln lassen sich bei der zweckentsprechenden Bezeichnung mit einander verbinden und sollen in solcher Verbindung hier mit den nöthigen Erläuterungen mitgetheilt werden.

In der allgemeinen Gleichung von den Wurzeln

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots$$

(von unbestimmt hohem Grade) habe man

$$a_0 = 1\,,$$

die Coefficienten im Uebrigen wie bisher,

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots;$$

dann leitet die durchgreifende Anwendung desselben Symbols zur Bezeichnung aller Wurzeln mit blosser Unterscheidung durch Indices natürlich dazu über, die symmetrische Function

$$\Sigma\alpha_1^{t_1}\alpha_2^{t_2}\alpha_3^{t_3}\ldots$$

durch die Zusammenstellung

$$(t_1\ t_2\ t_3\ \ldots)$$

ihrer Exponenten zu bezeichnen, wobei man zur Abkürzung immerhin für

$$\Sigma\alpha_1^{t_1}\alpha_2^{t_1}\alpha_3^{t_1}\ldots \quad \text{das Symbol} \quad (t_1^3\ldots),$$

für

$$\Sigma\alpha_1^{t_1}\alpha_2^{t_1}\alpha_3^{t_2}\ldots \qquad \text{das} \qquad (t_1^2 t_2\ldots)$$

anwenden kann. Man hat dann

$$\Sigma\alpha_1 = -a_1 = (1);\ \Sigma\alpha_1\alpha_2 = +a_2 = (1^2);\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3 = (1^3),\ \text{etc.}$$

$$\Sigma\alpha_1^t = s^t = (t) = \begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & \ldots 0 \\ 2a_2, & a_1, & a_0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ta_t, & a_{t-1}, & a_{t-2}, & \ldots a_1 \end{vmatrix},$$

und es entspringt die doppelte Aufgabe, einmal, jede symmetrische Function der Wurzeln, wie sie durch das Symbol

$$(l^i\ m^j\ \ldots)$$

repräsentiert werden kann, d. i.

$$\Sigma\alpha_1^l\alpha_2^l\ldots\alpha_i^l\cdot\alpha_{i+1}^m\alpha_{i+2}^m\ldots\alpha_{i+j}^m\ldots$$

in Gliedern der Coefficientenverbindungen

$$a_1^g a_2^h\ldots,$$

das andere mal, jede derartige Coefficientenverbindung

$$a_1^g a_2^h\ldots$$

in Gliedern der symmetrischen Functionen

$$(l^i\, m^j \ldots)$$

auszudrücken. Dabei erlauben diese Coefficientenverbindungen selbst noch die abkürzende Verschweigung des sich wiederholenden Buchstaben a und können durch die Zusammenstellung der Indices und Exponenten

$$1^g\, 2^h \ldots$$

allein bezeichnet werden; dadurch sind die symmetrischen Functionen der Wurzeln und die Combinationen der Coefficienten der Gleichung, welcher sie angehören, auf ganz dieselbe Form der Bezeichnung gebracht. So wie es die Festsetzungen der vorigen Artikel ergeben, so bleibt für die Summe

$$1 . g + 2 . h + \ldots$$

der Ausdruck als Gewicht der betreffenden Combination oder symmetrischen Function. Dem Gewichte 5 entsprechen die durch die Reihe

$$5,\ 14,\ 23,\ 1^2 3,\ 12^2,\ 1^3 2,\ 1^5$$

vertretenen Combinationen

$$a_5,\ a_1 a_4,\ a_2 a_3,\ a_1^2 a_3,\ a_1 a_2^2,\ a_1^3 a_2,\ a_1^5;$$

es entsprechen ihm aber auch die durch die nebenstehenden Symbole vertretenen symmetrischen Functionen:

(5)	$\Sigma\alpha_1^5$,
(41)	$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2$,
(32)	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2$,
(31^2)	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3$,
($2^2 1$)	$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$,
(21^3)	$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$,
(1^5)	$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$.

Die verschiedenen Combinationen der ersteren Linie werden nothwendig von numerischen Vielfachen der symmetrischen Functionen der letzteren Columne gebildet, und umgekehrt, die symmetrischen Functionen der Columne von numerischen Vielfachen der Combinationen der Linie; beides jedoch mit gewissen Einschränkungen. Die erste derselben ergiebt sich aus folgender leicht von einem beispielsweisen Falle auf den allgemeinen zu übertragenden Bemerkung: Jedes Glied des entwickelten Ausdrucks von $a_2\, a_4$ muss wenigstens so viel Wurzeln enthalten, als in jedem Gliede von a_4 enthalten sind, d. h. 4, und kann, da die Coefficien-

ten in Bezug auf jede der Wurzeln lineare Functionen sind, keine Potenz irgend einer Wurzel enthalten, welche die Zweite überschreitet. Sie enthält in der That Vielfache der symmetrischen Functionen

$$(2^2 1^2) \qquad \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_4,$$
$$(21^4) \qquad \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5,$$
$$(1^6) \qquad \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6.$$

Auf den allgemeinen Fall angewendet, geben die gleichen Betrachtungen das Gesetz: Die Combination

$$a_1^g \, a_2^h \ldots$$

enthält nur die symmetrischen Functionen

$$(l^i m^j \ldots),$$

für welche der grösste Theil die Zahl der Theile in

$$1^g \, 2^h \ldots$$

nicht überschreitet und die Zahl der Theile nicht kleiner als der grösste hierin enthaltene Theil ist.

Die beiden Coefficientenverbindungen

$$a_1^2 a_2 \text{ und } a_1^3 a_2 a_3,$$

welche durch die Symbole

$$1^2 2 \text{ und } 1^3 23$$

vertreten sind, und durch symmetrische Functionen der Wurzeln ausgedrückt ergeben

$$(-\Sigma\alpha_1)^2 (\Sigma\alpha_1 \alpha_2) \text{ und } (-\Sigma\alpha_1)^3 (\Sigma\alpha_1 \alpha_2)(-\Sigma\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$$

enthalten darnach die Glieder

$$+ 1 \, \alpha_1^3 \alpha_2 \text{ und } - 1 \, \alpha_1^5 \alpha_2^2 \alpha_3,$$

und daher die symmetrischen Functionen

$$(3 1) \text{ und } (5 2 1)$$

mit den respectiven numerischen Coefficienten

$$+ 1 \text{ und } - 1.$$

Die Symbole dieser letzteren können aus denen der Coefficienten-Combinationen

$$1^2 2 \qquad 1^3 2 3$$

immer abgeleitet werden, indem man jede Zahl des Symbols in eine Linie von Einheiten zerlegt und dann die Summen der durch Uebereinanderschreiben dieser Linien mit den Anfangsgliedern gebildeten Columnen zieht, d. i.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 1 & \text{und} & 1 \\ 1\,1 & & 1 \\ \overline{3\,1} & & 1\,1 \\ & & 1\,1\,1 \\ & & \overline{5\,2\,1} \end{array}$$

wie vorher. Die so erhaltenen Symbole sollen nach Cayley's und Sylvester's Vorgange die conjugierten von denen heissen, von denen man ausging. Alsdann lässt sich das vorige Ergebniss in die Regel fassen: Eine Combination

$$a_1^g\, a_2^h \ldots$$

enthält die dem conjugierten Symbol von

$$1^g\, 2^h \ldots$$

entsprechende symmetrische Function mit dem numerischen Coefficienten

$$+1 \text{ oder } -1,$$

je nachdem ihr Gewicht

$$1g + 2h + \ldots$$

gerade oder ungerade ist.

Im Zusammenhang mit diesem Begriff eines conjugierten Symbols zu einem gegebenen lässt sich eine fernere Einschränkung formulieren, die sich in den Entwickelungen der Coefficienten-Combinationen in den symmetrischen Functionen der Wurzeln geltend macht. Man findet in dem Ausdrucke der Combination

$$a_1\, a_3^2$$

das Glied $(3^2 1)$ nicht, weil es als mit

$$\alpha_1^3\, \alpha_2^3\, \alpha_3$$

identisch nicht in der Entwickelung von

$$a_1\, a_3^2 = (-\Sigma\alpha_1)\,(\Sigma\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)^2$$

vorkommen kann; gleichwohl könnte dasselbe nach der ersten Einschränkung der Entwickelung der Combination angehören. Um die jetzt betrachteten Ausscheidungen zu bezeichnen, ist es nöthig, unter den Symbolen der symmetrischen Functionen eine strenge Ordnung der Aufeinanderfolge dadurch zu begründen, dass man einmal die Symbole streng nach der Zahl ihrer Theile — immer das mit der kleineren Anzahl derselben voraus, — sodann nach der Grösse

des Grössten dieser Theile sich folgen lässt, — das mit dem Grössten voraus, im Falle der Gleichheit der grössten Theile das, welches unter den nächstkleineren Theilen den grössten enthält. Dann gilt der Satz: Die Combination

$$a_1^g\, a_2^h \ldots$$

enthält nur die symmetrischen Functionen, deren Symbole dem conjugierten ihres eigenen Symbols

$$1^g\, 2^h \ldots$$

nicht vorangehen. Da

$$3\,2^2$$

das conjugierte Symbol von

$$1\,3^2$$

ist und nach den Gesetzen dieser Ordnung dem Symbol

$$3^2\,1$$

nachfolgen müsste, so kann die diesem Letzteren entsprechende symmetrische Function nicht zum Ausdruck der Combination

$$a_1\, a_3^2$$

gehören.

9.

Als ein Beispiel seiner Art und Weise der Berechnung der Tafeln höherer Potenzen aus denen der niederen giebt Cayley das Folgende: Man hat

$$a_2 a_3 = (\Sigma \alpha_1 \alpha_2)(-\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1\,(2^2 1) + 3\,(21^3) + 10\,(1^5),$$

und findet daraus

$$a_1 a_2 a_3 = (-\Sigma \alpha_1)(\Sigma \alpha_1 \alpha_2)(-\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1\,(321) + 3\,(2^3) + 3\,(31^3) \\ + 8\,(2^2 1^2) + 22\,(21^4) + 60\,(1^6).$$

Die darin auftretenden Symbole sind nach den Bedingungen des Gewichts und den beiden entwickelten Einschränkungen bestimmt; nicht minder die Ordnung, in der sie sich folgen. Nur die numerischen Coefficienten bleiben zu entwickeln. Das dazu gewählte Verfahren entspricht genau der Multiplication von

$$a_2 a_3 = 1\,(2^2 1) + 3\,(21^3) + 10\,(1^5) \text{ mit } a_1 = (1)$$

und ist in rein mechanischer Ausbildung das folgende: Aus dem Symbol

$$2^2 1$$

gehen durch successive Vermehrung seiner einzelnen Theile

— Null unter denselben mit eingerechnet, also $2^2 10$ — um eine Einheit die Symbole

$$321,\quad 2^3,\quad 2^2 1^2$$

hervor, in welchen die Indices der vermehrten Theile respective

$$1,\quad 3,\quad 2$$

sind. Durch Multiplication derselben mit dem Coefficienten Eins des Symbols

$$2^2 1$$

erhält man die Coefficienten der Symbole

$$321,\quad 2^3,\quad 2^2 1^2$$

in der Entwickelung von $a_1\, a_2\, a_3$

$$1,\quad 3,\quad 2.$$

Auf dieselbe Weise werden aus dem Symbol

$$21^3$$

die neuen Symbole

$$31^3,\quad 2^2 1^2,\quad 21^4,$$

aus denen die Indices

$$1,\quad 2,\quad 4$$

als Factoren des Coefficienten 3 jenes Symbols in der ursprünglichen Entwickelung hervorgehen, so dass

$$3,\quad 6,\quad 12$$

die neuen Coefficienten sind. Endlich entspringen aus

$$1^5$$

die Symbole

$$21^4 \text{ und } 1^6$$

mit den Factorenindices

$$1 \text{ und } 6,$$

wodurch der Coefficient 10 in die neuen Coefficienten

$$10 \text{ und } 60$$

übergeht. Man hat somit überhaupt

$$a_1 a_2 a_3 = 1\,(321) + 3\,(2^3) + 2\,(2^2 1^2) + 3\,(31^3) + 6\,(2^2 1^2) + 12\,(21^4)$$
$$+ 10\,(21^4) + 60\,(1^6)$$
$$= 1\,(321) + 3\,(2^3) + 3\,(31^3) + 8\,(2^2 1^2) + 22\,(21^4) + 60\,(1^6).$$

(Siehe Tafel VI.)

Die Tafeln beiderlei Art mögen in der raumsparenden Verbindung, welche für dieselben möglich ist, mit den nöthigsten Erläuterungen folgen. Dieselben zeigen eine linke Aussenreihe, deren Symbole die entsprechenden symmetri-

schen Functionen der Wurzeln repräsentieren, und eine obere Aussenlinie, deren Symbole die Indices von Coefficientenverbindungen sind, auf welche die Tafel sich bezieht; jede der Tafeln enthält ein System grösserer und ein System kleinerer Ziffern, von denen das eine die obere linke, das andere die untere rechte Hälfte einnimmt, jenes der Tafel entsprechend, die die symmetrischen Functionen der Wurzeln in Function der Coefficientenverbindungen, diese der andern angehörig, durch welche alle die Coefficientenverbindungen als symmetrische Functionen der Wurzeln ausgedrückt werden; beide werden durch die von oben rechts nach unten links gehende Diagonale des Zifferquadrats vereinigt, welche mit positiven und negativen Einheiten gefüllt, beiden zugleich angehört. Der Tafel der symmetrischen Functionen entspricht das Lesen nach Zeilen, wie es das starke, der Tafel der Coefficientenverbindungen das Lesen nach Verticalreihen, wie es das schwache Gleichheitszeichen in der linken oberen Ecke der Tafel bezeichnen.

Es erscheint hiernach genügend, dem Ueberblick der den ersten fünf Graden entsprechenden Tafeln einige Beispiele der in ihnen enthaltenen Resultate folgen zu lassen, daran aber die weiteren Tafeln, die den Graden sechs bis zehn entsprechen, direct zu schliessen.

I.

#	1
(1)	−1

II.

#	2	1^2
(2)	−2.	+1.
(1^2)	+1.	+2.

III.

#	3	12	1^3
(3)	−3.	+3	−1.
(21)	+3	−1.	−3
(1^3)	−1.	−3	−6.

IV.

#	4	13	2^2	$1^2 2$	1^4
(4)	−4.	+4	+2	−4	+1.
(31)	+4	−1.	−2	+1.	+4
(2^2)	+2	−2	+1.	+2	+6
($1^2 2$)	−4	+1.	+2	+5.	+12
(1^4)	+1.	+4	+6	+12	+24.

V.

#	5	14	23	$1^2 3$	12^2	$1^3 2$	1^5
(5)	−5.	+5	+5	−5	−5	+5	−1.
(41)	+5	−1.	−5	+1	+3	−1.	−5
(32)	+5	−5	+1.	+2	−1.	−3	−10
(31^2)	−5	+1	+2	−1.	−2	−7	−20
$(2^2 1)$	−5	+3	−1.	−2	−5.	−12	−30
(21^3)	+5	−1.	−3	−7	−12	−27.	−60
(1^5)	−1.	−5	−10	−20	−30	−60	−120.

Man hat aus I) $a_1 = -\Sigma\alpha_1$ und $\Sigma\alpha_1 = -a_1$;

aus II) $a_1^2 = 1(2) + 2(1^2) = \Sigma\alpha_1^2 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2$;
$a_2 = (1^2) = \Sigma\alpha_1\alpha_2$; $\Sigma\alpha_1^2 = -2a_2 + a_1^2$;
$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = a_2$.

aus III) $a_3 = -\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$; $a_1 a_2 = -\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 - 3\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$;
$a_1^3 = -\Sigma\alpha_1^3 - 3\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 - 6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$;
$\Sigma\alpha_1^3 = -3a_3 + 3a_1 a_2 - a_1^3$; $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 = 3a_3 - a_1 a_2$;
$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3$.

aus IV), V) und VI beispielsweise:

$$a_1^2 a_2 = \Sigma\alpha_1^3\alpha_2 + 2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2 + 5\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 + 12\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;$$
$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2 = 4a_4 - a_1 a_3 - 2a_2^2 + a_1^2 a_2;$$
$$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2 = 5a_5 - a_1 a_4 - 5a_2 a_3 + a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2 - a_1^3 a_2;$$
$$a_1^2 a_2^2 = \Sigma\alpha_1^4\alpha_2^2 + 2\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^3 + 2\Sigma\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3 + 8\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 + 15\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + 18\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 34\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 + 78\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 180\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6.$$

Jede dieser Relationen wird zur Identität, wenn man für die in sie eintretenden Grössen der einen Art aus derselben Tafel ihre Ausdrücke in denen der andern Art substituiert, z. B.

$$\begin{aligned} a_1^2 a_2 &= \Sigma\alpha_1^3\alpha_2 + 2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2 + 5\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 + 12\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\ &= 1(31) + 2(2^2) + 5(21^2) + 12(1^4) \\ &= 1\{4a_4 - a_1 a_3 - 2a_2^2 + a_1^2 a_2\} + 2\{2a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2\} \\ &\qquad + 5\{a_1 a_3 - 4a_4\} + 12a_4 \\ &= a_1^2 a_2; \end{aligned}$$

ebenso in allen andern Fällen. Für die Tafeln VII bis X gilt in Allem das Nämliche. Für die Ueberführung aller in der ersten Abtheilung dieser Untersuchung vorkommenden Functionen der Coefficienten genügt die alleinige Rücksicht auf Tafel II oder die bekannten bereits an jener Stelle angewendeten Formeln. Gälte es nicht in den nachfolgenden Entwickelungen, die Formen der nächsthöheren Grade mit in Betracht zu ziehen, so würde die ausgedehnte Mittheilung dieser Tafeln der symmetrischen Functionen hier ganz unterblieben sein.

Erste Einlage zu pag. 74.

1.
6
15
20
30
60
90
20
30
30
20.

2^2	$1^5 2$	1^7
14	+ 7	− 1.
5	− 1.	− 7
1.	− 5	− 21
3	− 10	− 35
2	− 11	− 42
11	− 35	− 105
18	− 50	− 140
31	− 80	− 210
24	− 75	− 210
68	− 170	− 420
17	− 270	− 630
50	− 360	− 840
58.	− 570	−1260
70	−1200.	−2520
60	−2520	−5040.

1^23^2	12^23	1^323	1^53	2^4	1^22^3	1^42^2	1^62	1^8
+ 12	+ 24	− 32	+ 8	+ 2	− 16	+ 20	− 8	+ 1.
− 5	− 17	+ 11	− 1	− 2	+ 9	− 6	+ 1.	+ 8
− 9		+ 8	− 2	+ 2	− 4	+ 1.	+ 6	+ 28
+ 3	+ 6	− 3		− 2	+ 1.	+ 4	+ 15	+ 56
+ 2	− 4			+ 1.	+ 2	+ 6	+ 20	+ 70
+ 5	+ 5	− 5	+ 1.			+ 2	+ 13	+ 56
− 1	− 3	+ 1.	+ 5		+ 3	+ 14	+ 51	+ 168
− 2	+ 1.	+ 3	+ 10	+ 4	+ 11	+ 32	+ 95	+ 280
+ 1.	+ 2	+ 7	+ 20	+ 6	+ 18	+ 53	+ 150	+ 420
+ 2	+ 5	+ 12	+ 30	+ 12	+ 31	+ 80	+ 210	+ 560
		+ 3	+ 16		+ 6	+ 30	+ 108	+ 336
+ 2	+ 5	+ 18	+ 55	+ 12	+ 39	+ 114	+ 315	+ 840
+ 4	+ 12	+ 30	+ 80	+ 28	+ 68	+ 172	+ 440	+ 1120
+ 12.	+ 24	+ 58	+ 140	+ 48	+ 117	+ 284	+ 690	+ 1680
+ 28	+ 48.	+ 108	+ 240	+ 90	+ 204	+ 468	+ 1080	+ 2520
+ 6	+ 12	+ 46.	+ 140	+ 24	+ 84	+ 246	+ 660	+ 1680
+ 30	+ 58	+ 141	+ 340.	+ 108	+ 258	+ 612	+ 1440	+ 3360
+ 68	+ 117	+ 258	+ 570	+ 204.	+ 453	+ 1008	+ 2250	+ 5040
+ 80	+ 140	+ 340	+ 800	+ 240	+ 570.	+ 1320	+ 3000	+ 6720
+ 172	+ 284	+ 612	+1320	+ 468	+1008	+ 2172.	+ 4680	+10080
+ 440	+ 690	+1440	+3000	+1080	+2250	+ 4680	+ 9720.	+20160
+1120	+1680	+3360	+6720	+2520	+5040	+10080	+20160	+40320.

Zweite Einlage zu pag. 74.

1^9
1.
9
36
84
126
72
252
504
630
756
1260
1680
504
1512
2520
3780
5040
7560
3024
7560
10080
15120
22680
15120
30240
45360
60480
90720
181440
362880.

$1^7 3$	2^5	$1^2 2^4$	$1^4 2^3$	$1^6 2^2$	$1^8 2$	1^{10}
+ 10	− 2	+ 25	− 50	+ 35	− 10	+ 1.
− 1	+ 2	− 16	+ 20	− 8	+ 1.	+ 10
− 2	− 2	+ 9	− 6	+ 1.	+ 8	+ 45
	+ 2	− 4	+ 1.	+ 6	+ 28	+ 120
	− 2	+ 1.	+ 4	+ 15	+ 56	+ 210
	+ 1.	+ 2	+ 6	+ 20	+ 70	+ 252
+ 1.				+ 2	+ 17	+ 90
+ 7			+ 3	+ 20	+ 92	+ 360
+ 21		+ 4	+ 19	+ 72	+ 252	+ 840
+ 35	+ 5	+ 14	+ 42	+ 130	+ 406	+ 1260
+ 42		+ 6	+ 30	+ 115	+ 392	+ 1260
+ 105	+ 10	+ 32	+ 99	+ 296	+ 868	+ 2520
+ 140	+ 20	+ 53	+ 144	+ 400	+ 1120	+ 3150
+ 210	+ 30	+ 80	+ 213	+ 570	+ 1540	+ 4200
+ 22			+ 6	+ 42	+ 192	+ 720
+ 112		+ 12	+ 63	+ 242	+ 812	+ 2520
+ 266	+ 20	+ 68	+ 210	+ 622	+ 1792	+ 5040
+ 350	+ 45	+ 114	+ 306	+ 840	+ 2310	+ 6300
+ 462	+ 30	+ 108	+ 339	+ 990	+ 2772	+ 7560
+ 875	+ 110	+ 284	+ 735	+ 1900	+ 4900	+ 12600
+ 1260	+ 180	+ 444	+ 1092	+ 2700	+ 6720	+ 16800
+ 1470	+ 180	+ 468	+ 1194	+ 3015	+ 7560	+ 18900
+ 2100	+ 310	+ 740	+ 1776	+ 4280	+ 10360	+ 25200
+ 280		+ 24	+ 132	+ 510	+ 1680	+ 5040
+ 1092	+ 60	+ 228	+ 720	+ 2082	+ 5712	+ 15120
+ 2030	+ 240	+ 612	+ 1566	+ 3990	+ 10080	+ 25200
+ 3360	+ 390	+ 1008	+ 2547	+ 6330	+ 15540	+ 37800
+ 4760	+ 680	+ 1604	+ 3792	+ 8980	+ 21280	+ 50400
+ 7770	+ 1170	+ 2688	+ 6180	+ 14220	+ 32760	+ 75600
+ 12600	+ 2040	+ 4530	+ 10080	+ 22500	+ 50400	+ 113400
+ 2520	+ 120	+ 480	+ 1530	+ 4380	+ 11760	+ 30240
+ 7560	+ 840	+ 2172	+ 5436	+ 13290	+ 31920	+ 75600
+ 10640	+ 1500	+ 3480	+ 8100	+ 18840	+ 43680	+ 100800
+ 17220	+ 2580	+ 5844	+ 13212	+ 29820	+ 67200	+ 151200
+ 27720	+ 4530	+ 9876	+ 21564	+ 47160	+ 103320	+ 226800
+ 16800.	+ 1800	+ 4680	+ 11610	+ 27900	+ 65520	+ 151200
+ 37800	+ 5700.	+ 12720	+ 28260	+ 62520	+ 137760	+ 302400
+ 60480	+ 10080	+ 21564.	+ 46152	+ 98820	+ 211680	+ 453600
+ 82320	+ 12600	+ 27720	+ 60480.	+ 131040	+ 282240	+ 604800
+ 131040	+ 22500	+ 47160	+ 98820	+ 207000.	+ 433440	+ 907200
+ 282240	+ 50400	+ 103320	+ 211680	+ 433440	+ 887040.	+ 1814400
+ 604800	+ 113400	+ 226800	+ 453600	+ 907200	+ 1814400	+ 3628800.

Der Ueberblick über das System diese Tafeln bestätigt aber ein von Cayley zuerst ausgesprochenes Gesetz, von dessen allgemeinem Beweis er nur andeutet, dass er aus Borchardt's allgemeiner Formel (siehe Art. 8) von den erzeugenden Functionen der symmetrischen Functionen möge abgeleitet werden. Es lautet: Die Zahl jeder Tafel, welche einem Symbol i in der Aussenlinie und einem Symbol (j) in der Aussencolumne entspricht, ist der Zahl derselben Tafel gleich, welche dem Symbol j in der Aussenlinie und dem Symbol (i) in der Aussencolumne angehört. Oder auch: Der Coefficient der Combination (P) in der symmetrischen Function (Q) ist dem Coefficienten der Combination (Q) in der symmetrischen Function (P) gleich; und der Coefficient der symmetrischen Function (P) in der Combination (Q) ist gleich dem Coefficienten der symmetrischen Function (Q) in der Combination (P).

II. Ueber die Determinanten der Wurzeln und die Functionen von Sturm und Sylvester.

10.

Das Vorhergehende hat gezeigt, wie in der Theorie der symmetrischen Functionen die Determinantenform wiederholt naturgemäss sich darbietet; es liegt in dem Begriffe beider Functionen, dass diese Begegnungen durchgreifend sein müssen, denn Determinanten sind alternierende Functionen, d. h. solche, die durch die Vertauschung der Werthe von je zwei in sie eingehenden Elementen einen Zeichenwechsel erleiden; während symmetrische Functionen bei einer solchen Vertauschung völlig unverändert bleiben. In Folge dessen ist das Quadrat jeder Determinante eine symmetrische Function.

Die bekannte Definition der Determinanten*) als Producte aller Differenzen gegebener Grössen führt sogleich ge-

---

*) Man vergleiche Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten." Leipzig, Hirzel. 1857.

rade auf symmetrische Functionen derjenigen Form, welche in den Entwickelungen des ersten Abschnitts überall vorherrschte, und der Verfolg der Untersuchung wird die allgemeine Bedeutung dieser Formen immer mehr ins Licht stellen.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die n gegebenen Grössen, beispielsweise die n Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

so ist das durch

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

vertretene Product ihrer Differenzen*)

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2) \ldots (\alpha_n - \alpha_2) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$= \pm \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Man schliesst diese Identität aus der Bemerkung, dass die Determinante für jede Gleichheit zweier Elemente

$$\alpha_i, \alpha_j$$

verschwindet, dass also jede der Differenzen

$$\alpha_i - \alpha_j$$

als einer ihrer Factoren erscheint, und aus der Uebereinstimmung der Exponenten und Coefficienten in ihrer Entwickelung und der des Products der Differenzen.

Dieses Ergebniss mag zunächst auf die in Art. 8 entscheidende Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1' - \alpha_1)}, & \frac{1}{(\alpha_2' - \alpha_1)} & \ldots & \frac{1}{(\alpha_n' - \alpha_1)} \\ \frac{1}{(\alpha_1' - \alpha_2)}, & \frac{1}{(\alpha_2' - \alpha_2)} & \ldots & \frac{1}{(\alpha_n' - \alpha_2)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{(\alpha_1' - \alpha_n)}, & \frac{1}{(\alpha_2' - \alpha_n)} & \ldots & \frac{1}{(\alpha_n' - \alpha_n)} \end{vmatrix}$$

*) Siehe Art. 8.

angewendet werden, um dabei einige einfache Eigenschaften der Determinanten zu erinnern. Man kann die Nenner aus den Elementen derselben entfernen, indem man jedes Glied mit dem Product der Nenner aller mit ihm in derselben Verticalreihe stehenden Glieder multipliciert; dann sind die Multiplicatoren der auf einander folgenden Reihen respective

$$\begin{array}{l}(\alpha_1'-\alpha_1)(\alpha_1'-\alpha_2)\ldots(\alpha_1'-\alpha_n),\\ (\alpha_2'-\alpha_1)(\alpha_2'-\alpha_2)\ldots(\alpha_2'-\alpha_n),\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ (\alpha_n'-\alpha_1)(\alpha_n'-\alpha_2)\ldots(\alpha_n'-\alpha_n).\end{array}$$

Die Determinante selbst wird aber durch diesen Process mit

$$\Pi_{i,j}(\alpha_i'-\alpha_j'),$$

d. i. mit dem Product sämmtlicher Differenzen zwischen den Elementen der Reihe

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n'$$

und denen der andern Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

multipliciert; ihre Elemente sind ganze rationale Functionen der gegebenen Grössen vom $(n-1)^{ten}$ Grade und sie selbst wird durch

$$\triangle \cdot \Pi_{i,j}(\alpha_i'-\alpha_j)$$

dargestellt. Da sie für die Uebereinstimmung der in parallelen Reihen stehenden Elemente verschwindet, so ist sie nach dem Vorigen durch das Product

$$P(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n') \cdot P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

theilbar, welches selbst ebenfalls eine ganze rationale Function der gegebenen Grössen vom $n(n-1)^{ten}$ Grade ist. Der Quotient

$$\frac{\triangle \cdot \Pi_{i,j}(\alpha_i'-\alpha_j)}{P(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n')\, P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}$$

ist daher eine von den Grössen

$$\alpha_1', \ldots; \alpha_1, \ldots$$

unabhängige Zahl und lässt sich ermitteln, indem man voraussetzt, dass

$$\alpha_i' = \alpha_i$$

sei; denn dann verschwinden in der von dem Nenner befreiten Determinante $\triangle$ alle ausser der Hauptdiagonale stehenden Glieder und sie reduciert sich auf das Product der in dieser letzteren enthaltenen; diese sind aber

$$\begin{array}{llllll}
 & (\alpha_1-\alpha_2) & (\alpha_1-\alpha_3) & (\alpha_1-\alpha_4) & \ldots\ldots & (\alpha_1-\alpha_n), \\
(\alpha_2-\alpha_1) & & (\alpha_2-\alpha_3) & (\alpha_2-\alpha_4) & \ldots\ldots & (\alpha_2-\alpha_n), \\
(\alpha_3-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_2) & & (\alpha_3-\alpha_4) & \ldots\ldots & (\alpha_3-\alpha_n), \\
(\alpha_n-\alpha_1) & (\alpha_n-\alpha_2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (\alpha_n-\alpha_{n-1}) & ,
\end{array}$$

und ihr Product ist daher

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\{P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)\}^2.$$

Man erkennt damit als den Werth des fraglichen numerischen Quotienten

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

und hat daher

$$\frac{P(\alpha_1',\alpha_2',\ldots\alpha_n').P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)}{\prod\limits_{i,j}(\alpha_i'-\alpha_j)}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1'-\alpha_1}, & \frac{1}{\alpha_2'-\alpha_1}, & \ldots & \frac{1}{\alpha_n'-\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_1'-\alpha_2}, & \frac{1}{\alpha_2'-\alpha_2}, & \ldots & \frac{1}{\alpha_n'-\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{\alpha_1'-\alpha_n}, & \frac{1}{\alpha_2'-\alpha_n}, & \ldots & \frac{1}{\alpha_n'-\alpha_n} \end{vmatrix}^{*)}.$$

Das Quadrat

$$\{P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)\}^2,$$

oder das Product der Quadrate aller möglichen Differenzen der Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades, d. i. die Discriminante derselben, kann nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten leicht aus dem Product aller Wurzeldifferenzen abgeleitet werden. Das Product zweier Determinanten ist eine Determinante, deren Elemente gebildet sind aus der Summe der Producte der in irgend einer Reihe der ersten enthaltenen Elemente in die Elemente in einer Reihe der zweiten.

Insbesondere ist in Folge dessen das Quadrat einer Determinante eine symmetrische Determinante, d. h. eine solche, in welcher das p^{te} Element der q^{ten} Reihe dem q^{ten} Element der p^{ten} Reihe gleich ist.

---

*) Vergl. oben Art. 8. p. 64.

Man hat speciell

$$(\alpha_2-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\ldots(\alpha_n-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_n \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2, & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3, & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} n, & \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n, & \ldots \alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\ldots+\alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n, & \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2, & \alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots+\alpha_n^n \\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2, & \alpha_1^3+\alpha_2^3+\ldots+\alpha_n^3, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+..+\alpha_n^{n-1}, & \alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots+\alpha_n^n, & \alpha_1^{2n-2}+\alpha_2^{2n-2}+\ldots+\alpha_n^{2n-2} \end{vmatrix},$$

d. i. nach den eingeführten Bezeichungen

$$=\begin{vmatrix} n, & s_1, & s_2, & \ldots s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_n \\ s_2, & s_3, & \cdot & \cdot \\ s_3, & s_4, & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

worin man noch das Element n durch s_0 ersetzen kann.

Man hat so für die Gleichungen des zweiten und dritten Grades für das Quadrat der Wurzeldifferenzen und für das Product der entsprechenden drei Quadrate die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Wenn in einer Determinante die Zahl der Elemente immer ein Quadrat oder die Anzahl der Zeilen der Anzahl der Reihen gleich ist, so können doch die vorigen Betrachtungen auf Paare von Elementengruppen übertragen werden, bei denen die Zahl der Reihen von derjenigen der Zeilen verschieden ist. Man bildet z. B. aus den Gruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \alpha_1', & \beta_1', & \gamma_1', \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \alpha_2', & \beta_2', & \gamma_2' \end{matrix}$$

nach dem Gesetz der Multiplication die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1'+\beta_1\beta_1'+\gamma_1\gamma_1', & \alpha_2\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\gamma_2\gamma_1' \\ \alpha_1\alpha_2'+\beta_1\beta_2'+\gamma_1\gamma_2', & \alpha_2\alpha_2'+\beta_2\beta_2'+\gamma_2\gamma_2' \end{vmatrix}.$$

Dieselbe kann in eine Summe einfacherer Determinanten zerlegt werden nach dem Satze, dass eine Determinante die Summe zweier anderen ist, wenn alle Elemente einer ihrer Reihen als Summen zweier anderen erscheinen; nämlich in

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \alpha_2\alpha_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \beta_2\beta_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \beta_2\beta_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \gamma_2\gamma_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \gamma_2\gamma_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \alpha_2\alpha_1' \\ \beta_1\beta_2', & \alpha_2\alpha_2' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_1' \\ \beta_1\beta_2', & \beta_2\beta_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \gamma_2\gamma_1' \\ \beta_1\beta_2', & \gamma_2\gamma_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1\gamma_1', & \alpha_2\alpha_1' \\ \gamma_1\gamma_2', & \alpha_2\alpha_2' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma_1\gamma_1', & \beta_2\beta_1' \\ \gamma_1\gamma_2', & \beta_2\beta_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1\gamma_1', & \gamma_2\gamma_1' \\ \gamma_1\gamma_2', & \gamma_2\gamma_2' \end{vmatrix}.$$

Unter denselben verschwinden drei identisch, nämlich die erste, fünfte und neunte, und die übrigen sechs bilden die Entwickelung der Productensumme:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1', & \beta_1' \\ \alpha_2', & \beta_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \gamma_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1', & \gamma_1' \\ \alpha_2', & \gamma_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1, & \gamma_1 \\ \beta_2, & \gamma_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \beta_1', & \gamma_1' \\ \beta_2', & \gamma_2' \end{vmatrix},$$

mit welcher daher die oben gebildete Determinante identisch ist. Da man für jede beliebige Zahl von Elementen beider Gruppen die analoge Entwickelung immer mit demselben Erfolge wiederholt, so lange nur die Zahl der Elemente einer Zeile in jeder derselben die Zahl der Zeilen selbst übertrifft, so ist allgemein der Werth einer aus den Elementengruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots, & \alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1' \ldots, \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \ldots, & \alpha_2', \beta_2', \gamma_2', \delta_2' \ldots, \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3 \ldots, & \alpha_3', \beta_3', \gamma_3', \delta_3' \ldots, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad , \end{matrix}$$

in deren jeder die Zahl der Elemente in jeder Zeile die Zahl der Zeilen übertrifft, nach der Regel der Multiplication gebildeten Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1'+\beta_1\beta_1'+\gamma_1\gamma_1'+\ldots, & \alpha_2\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\gamma_2\gamma_1'+\ldots, & \alpha_3\alpha_1'+\beta_3\beta_1'+\gamma_3\gamma_1'+\ldots, \ldots \\ \alpha_1\alpha_2'+\beta_1\beta_2'+\gamma_1\gamma_2'+\ldots, & \alpha_2\alpha_2'+\beta_2\beta_2'+\gamma_2\gamma_2'+\ldots, & \alpha_3\alpha_2'+\beta_3\beta_2'+\gamma_3\gamma_2'+\ldots, \ldots \\ \alpha_1\alpha_3'+\beta_1\beta_3'+\gamma_1\gamma_3'+\ldots, & \alpha_2\alpha_3'+\beta_2\beta_3'+\gamma_2\gamma_3'+\ldots, & \alpha_3\alpha_3'+\beta_3\beta_3'+\gamma_3\gamma_3'+\ldots, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

die Summe aller Producte aus zwei Factoren, deren einer jede mögliche Determinante, welche aus der einen Gruppe von Elementen gebildet werden kann, indem man so viel Reihen derselben zusammen nimmt, als Elemente in einer ihrer Reihen stehen, und deren anderer die jedesmal entsprechend aus den Elementen der anderen Gruppe gebildete Determinante ist.

Die analoge Untersuchung an zwei Gruppen von Elementen, in welchen die Zahl der Elemente einer Zeile kleiner ist, als die Zahl der Zeilen, liefert ein wesentlich verschiedenes Resultat. Beispielsweise seien die Gruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1; & \alpha_1', \beta_1'; \\ \alpha_2, \beta_2; & \alpha_2', \beta_2'; \\ \alpha_3, \beta_3; & \alpha_3', \beta_3' \end{matrix}$$

betrachtet. Man bildet aus ihnen nach dem Gesetz der Multiplication die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1'+\beta_1\beta_1', & \alpha_2\alpha_1'+\beta_2\beta_1', & \alpha_3\alpha_1'+\beta_3\beta_1' \\ \alpha_1\alpha_2'+\beta_1\beta_2', & \alpha_2\alpha_2'+\beta_2\beta_2', & \alpha_3\alpha_2'+\beta_3\beta_2' \\ \alpha_1\alpha_3'+\beta_1\beta_3', & \alpha_2\alpha_3'+\beta_2\beta_3', & \alpha_3\alpha_3'+\beta_3\beta_3' \end{vmatrix},$$

und erkennt sie durch Zerlegung als die Summe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_1', & \alpha_3\alpha_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \alpha_2\alpha_2', & \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_1\alpha_3', & \alpha_2\alpha_3', & \alpha_3\alpha_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \alpha_2\alpha_1', & \beta_3\beta_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \alpha_2\alpha_2', & \beta_3\beta_2' \\ \alpha_1\alpha_3', & \alpha_2\alpha_3', & \beta_3\beta_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \beta_2\beta_1', & \alpha_3\alpha_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \beta_2\beta_2', & \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_1\alpha_3', & \beta_2\beta_3', & \alpha_3\alpha_3' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_1', & \beta_2\beta_1', & \beta_3\beta_1' \\ \alpha_1\alpha_2', & \beta_2\beta_2', & \beta_3\beta_2' \\ \alpha_1\alpha_3', & \beta_2\beta_3', & \beta_3\beta_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \alpha_2\alpha_1', & \alpha_3\alpha_1' \\ \beta_1\beta_2', & \alpha_2\alpha_2', & \alpha_3\alpha_2' \\ \beta_1\beta_3', & \alpha_2\alpha_3', & \alpha_3\alpha_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \alpha_2\alpha_1', & \beta_3\beta_1' \\ \beta_1\beta_2', & \alpha_2\alpha_2', & \beta_3\beta_2' \\ \beta_1\beta_3', & \alpha_2\alpha_3', & \beta_3\beta_3' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_1', & \alpha_3\alpha_1' \\ \beta_1\beta_2', & \beta_2\beta_2', & \alpha_3\alpha_2' \\ \beta_1\beta_3', & \beta_2\beta_3', & \alpha_3\alpha_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1\beta_1', & \beta_2\beta_1', & \beta_3\beta_1' \\ \beta_1\beta_2', & \beta_2\beta_2', & \beta_3\beta_2' \\ \beta_1\beta_3', & \beta_2\beta_3', & \beta_3\beta_3' \end{vmatrix},$$

welche sämmtlich einzeln identisch verschwinden, weil in jeder von ihnen nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Factoren gleiche Reihen von Elementen erscheinen; somit ist die obige Determinante selbst mit Null identisch, und da dieselben Schlussfolgerungen sich auf den allgemeinen Fall ohne Schwierigkeit übertragen lassen, so erhellt das

allgemeine Gesetz, dass jede Determinante, welche nach der Regel der Multiplication aus den Elementen zweier Gruppen gebildet werden kann, in welchen die Zahl der Elemente einer Zeile von der Zahl der Zeilen selbst übertroffen wird, mit Null identisch ist.

Für den speciellen Fall

$$\alpha_i = \alpha_i', \quad \beta_i = \beta_i', \text{ etc.},$$

als welcher hier besonders ins Auge zu fassen ist, liefern die vorstehenden Entwickelungen die folgenden Resultate. Man erhält für die Gruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; & \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; & \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \end{matrix}$$

als bei denen die Zahl der Elemente einer Zeile die Zahl der Zeilen übertrifft,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & , \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 \\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2, & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^2, \beta_1^2 \\ \alpha_2^2, \beta_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1^2, \gamma_1^2 \\ \beta_2^2, \gamma_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1^2, \alpha_1^2 \\ \gamma_2^2, \alpha_2^2 \end{vmatrix};$$

und für die analogen Gruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1; & \alpha_1, \beta_1; \\ \alpha_2, \beta_2; & \alpha_2, \beta_2; \\ \alpha_3, \beta_3; & \alpha_3, \beta_3, \end{matrix}$$

als bei denen die Zahl der Elemente einer Zeile von der Zahl der Zeilen übertroffen wird,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2, & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3 \\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2, & \alpha_2^2+\beta_2^2, & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3 \\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3, & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3, & \alpha_3^2+\beta_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Und allgemein für die Gruppen

$$\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots; & \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots; \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots; & \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots; \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \ldots; & \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \ldots; \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\ldots, & \alpha_2\alpha_1+\beta_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1+\ldots, & \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1+\ldots, \ldots \\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\ldots, & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2+\ldots, & \alpha_3\alpha_2+\beta_3\beta_2+\gamma_3\gamma_2+\ldots, \ldots \\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3+\ldots, & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3+\ldots, & \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2+\ldots, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

mit Null identisch, wenn die Zahl der Elemente einer Zeile in den Gruppen oder die Zahl der Glieder in jedem Elemente in der Determinante von der Zahl der Zeilen übertroffen wird; hingegen gleich der Summe der Quadrate aller möglichen Determinanten, die aus den Elementen einer Gruppe gebildet werden können, indem man so viel Reihen derselben als Reihen einer Determinante vereinigt, als jede einzelne von ihnen Elemente zählt, wenn die Zahl der letzteren kleiner ist, als die Zahl der Elemente einer Zeile der Gruppen oder der Glieder eines Elements der Determinante.

So liefert die Gruppe

$$\begin{matrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \alpha_1^3, \dots \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \alpha_2^3, \dots \\ 1, & \alpha_3, & \alpha_3^2, & \alpha_3^3, \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, & \alpha_n^3, \dots \end{matrix}$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades sind, das Resultat

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \dots s_{m-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \dots s_m \\ s_2, & s_3, & s_4, & \dots s_{m+1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, & \dots s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots \alpha_m \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2, & \dots \alpha_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-1}, & \alpha_2^{m-1}, & \dots \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 \right\},$$

in welchem die durch Σ angezeigte Summierung sich auf alle die Determinanten bezieht, welche aus der angegebenen dadurch entstehen können, dass man statt der Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m$$

je m verschiedene aus der Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$$

setzt.

Nach den früheren Entwickelungen dieses Artikels kann man dann endlich schreiben

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2, \quad \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2,$$

$$\begin{vmatrix} s_0, s_1, s_2, s_3 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \\ s_2, s_3, s_4, s_5 \\ s_3, s_4, s_5, s_6 \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2, \text{ etc.}$$

Die Reihe dieser Determinanten schliesst mit derjenigen, welche das schon oben erwähnte Product der Quadrate aller Wurzeldifferenzen vorstellt und die für die Gleichung des n^{ten} Grades durch

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots s_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

repräsentiert ist.

11.

Die grosse Bedeutung, welche diese Reihe von Determinanten für die Theorie der algebraischen Gleichungen hat, lässt sich im Anschluss an das berühmte Theorem von Sturm mit einiger Vollständigkeit überblicken. Die nahe Beziehung desselben zu dem Zwecke dieser Untersuchung bedingt seine kurze Darlegung nach diesen Zusammenhängen.

Hinsichtlich der gewöhnlichen Darstellungsweise des Satzes selbst darf jedoch wohl auf die neueren Werke über die Theorie und Auflösung der Gleichungen verwiesen werden. Einige historische Notizen und literarische Nachweisungen mögen vorangeschickt werden. Zuerst im Jahre 1829 durch einen kurzen Auszug im „Bulletin de Sciences“ von Férussac, t. XI, p. 419, bekannt gemacht, ward das Theorem von Sturm 1835 in dem „Mémoire sur la résolutions des équations numériques“ in den „Mémoires des Savants étrangéres“, t. VI, p. 271, im Zusammenhang dargelegt. Im Decemberheft des „London and Edinburgh Philosophical Magazine“ 1839 stellte sodann Sylvester die Functionen von Sturm mit Hilfe der Wurzeln der Gleichungen einfach dar und Sturm selbst lieferte im VII. Bande des Journals von Liouville (1842) den Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrucksformen. Im XI. und XII.

Bande desselben Journals — p. 297 und p. 52 resp. — wurden diese Formeln von Cayley und Borchardt, von Joachimsthal im 48. Bande des Journals von Crelle p. 402 unter der Form von Determinanten der Potenzensummen der Wurzeln der Gleichung, endlich von Cayley — Liouville's Journal, t. XIII, p. 269 und in noch eleganterer Form im 157. Bande der „Philosophical Transactions" p. 733 (1857) — in Form von Determinanten aus den Coefficienten der Gleichung dargestellt. Sylvester veröffentlichte seine Untersuchungen über den Sturm'schen Satz in dem grossen Memoir: „On a Theory of the Syzygetic Relations of two rational integral Functions" etc. im 153. Bande der „Philosophical Transactions" p. 407—548 (1853), und Hermite zeigte im 35. und 36. Bande der „Comptes rendus" p. 52 und p. 294 (1852, 1853), dass auch in dem Falle von zwei algebraischen Gleichungen Functionen existieren, welche die characteristischen Eigenschaften der Functionen von Sturm besitzen; damit ist das Theorem von Sturm auf beliebige Systeme algebraischer Gleichungen ausgedehnt. Eine schätzbare Darstellung dieser Entdeckung gab Brioschi im XV. Bande der „Nouvelles Annales de Mathématiques" p. 264—286 (1856).*) (Siehe ebenda im XIII. Bande, p. 71 die Darlegung der Cayley'schen Formeln durch denselben Autor.) Sie mag hier angeführt sein, weil die Ausdehnung auf Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten über den gegenwärtigen Zweck hinausgeht. Wenn nämlich die Gleichsetzung eines homogenen Polynoms n^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen mit Null ein geometrisches Elementargebilde von n Elementen repräsentiert, so lehrt das Theorem von Sturm erkennen, wie viel Elemente dieses Letzteren zwischen zwei durch bestimmte Zahlenwerthe gegebenen Grenzelementen enthalten sind. Die Theorie der Sturm'schen Functionen für das System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten oder von zwei homogenen Formen mit drei Veränderlichen liefert die Beantwortung der Frage nach der Anzahl der in einem durch die gegebenen Grenzen bestimm-

*) Vergl. auch „Zeitschrift für Mathematik und Physik" von Schlömilch etc., Bd. II, p. 209.

ten Intervalle enthaltenen gemeinschaftlichen Elemente der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Curven etc. Sie umfasst auch die Mittel zur Bestimmung der imaginären Wurzeln einer Gleichung, weil die Untersuchung derselben sich auf die Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückführt. Die Ausdehnung auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten führt zur Bestimmung der Anzahl der in einem gegebenen Intervall enthaltenen gemeinschaftlichen Elemente von drei algebraischen Flächen, z. B. für rechtwinklige Punktcoordinaten zur Bestimmung der Zahl gemeinschaftlicher Punkte, welche in dem Raume eines rechtwinkligen Parallelepipedes enthalten sind, das den gegebenen Grenzwerthen entspricht; es ist nicht schwer, für andere Coordinatensysteme das Analoge auszusprechen. Das allgemeine Problem der Analysis findet seine geometrische Erläuterung nur in dem idealen Raume von p Dimensionen.

Wenn $U = 0$ eine homogene Gleichung mit zwei Veränderlichen und V die erste Derivierte derselben nach der Unbekannten $\frac{x}{y}$ bezeichnen, also

$$U = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \quad + a_n y^n = 0,$$
$$V = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y + (n-2) a_2 x^{n-3} y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} = 0,$$

so liefert die Operation zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses der Polynome U und V, bei Verwandlung der Vorzeichen des jedesmaligen Restes in die entgegengesetzten, in der Reihe dieser Reste die Reihe der Sturm'schen Functionen oder Reste für die Gleichung $U = 0$. Wenn man in die Functionen U, V und die so nach einander erhaltenen Reste, deren letzter von der unbekannten Grösse frei und zugleich, so lange die Gleichung kein Paar von gleichen Wurzeln besitzt, von Null verschieden ist, an Stelle der unbekannten Grösse zwei bestimmte Zahlenwerthe a und b, $(a > b)$ einsetzt und die Vorzeichen der Substitutionsresultate bestimmt, so findet man die Zahl der zwischen den Grenzen a und b gelegenen reellen Wurzeln der Gleichung durch den Ueberschuss gegeben, welchen die Zahl der Zeichenwechsel in der der Substitution von a entsprechenden Reihe über die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Substitution b bildet. Wenn man für a und b

die Grenzwerthe aller reellen Wurzeln $+\infty$ und $-\infty$ wählt, so liefert der ebenso bestimmte Ueberschuss die Gesammtzahl der reellen Wurzeln der Gleichung; dabei bedarf es offenbar nicht der Untersuchung der ganzen Restfunctionen, sondern nur der Beachtung derjenigen ihrer Glieder, welche die jedesmal höchste Potenz der Unbekannten enthalten.

Bezeichnet man die Reihe der Reste durch

$$R_2,\ R_3,\ R_4 \ldots$$

und die der Quotienten durch

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \ldots,$$

so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} U &= Q_1 V - R_2\ , \\ V &= Q_2 R_2 - R_3\ , \\ R_2 &= Q_3 R_3 - R_4\ , \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ R_{k-1} &= Q_k R_k - R_{k+1}. \end{aligned}$$

Man erhält aus diesen Gleichungen die anderen

$$\begin{aligned} R_2 &= Q_1 V - U\ , \\ R_3 &= Q_2 R_2 - V = (Q_2 Q_1 - 1) V - Q_2 U, \\ R_4 &= Q_3 R_3 - R_2 = (Q_3 Q_2 - 1) R_2 - Q_3 V \\ &= (Q_1 Q_2 Q_3 - Q_1 - Q_3) V - (Q_2 Q_3 - 1) U, \end{aligned}$$

etc.,

allgemein

$$\begin{aligned} R_{k-1} &= A_{k-1} \,.\, V - B_{k-1} \,.\, U, \\ R_k &= A_k \,.\, V - B_k \,.\, U, \\ R_{k+1} &= A_{k+1} \,.\, V - B_{k+1} \,.\, U. \end{aligned}$$

Nach dem Bildungsgesetze der A und B aus den Quotienten Q_1, Q_2 etc. und weil diese in Bezug auf die unbekannte Grösse sämmtlich vom ersten Grade sind, ergiebt sich, dass A_k vom Grade $(k-1)$ und B_k vom Grade $(k-2)$ in Bezug auf jene unbekannte Grösse sind.

Man hat ferner wegen

$$R_{k+1} = Q_k \,.\, R_k - R_{k-1}$$

mittelst der vorigen drei Gleichungen die Relationen

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= Q_k \,.\, A_k - A_{k-1}, \\ B_{k+1} &= Q_k \,.\, B_k - B_{k-1}, \end{aligned}$$

also

$$A_k \,.\, B_{k+1} - A_{k+1} \,.\, B_k = A_{k-1} \,.\, B_k - A_k \,.\, B_{k-1},$$

d. i. constant, und wegen

$$A_2 = Q_1,\ B_2 = 1,\ A_3 = (Q_2 Q_1 - 1),\ B_3 = Q_2$$
$$A_2 \,.\, B_3 - A_3 \,.\, B_2 = Q_1 Q_2 - (Q_1 Q_2 - 1) = 1,$$
$$A_k \,.\, B_{k+1} - A_{k+1} \,.\, B_k = 1.$$

Diese Eigenschaft der Sturm'schen Reste, unter die Form $AV - BU$ zu fallen, reicht zu ihrer vollkommenen Bestimmung allein hin. Denn wenn man beispielsweise in die Gleichung

$$R_2 = Q_1 V - U$$

den Quotienten Q_1 als vom ersten Grade in der unbekannten Grösse der Gleichung in der Form

$$Q_1 = a_1 x + b_1$$

substituiert, wo a_1 und b_1 zu bestimmende Constanten sind, so reicht zu ihrer Bestimmung die aus dem Grade von R_2, d. i. $(n-2)$, hervorgehende Bedingung hin, dass die beiden höchsten Potenzen der Unbekannten aus der Entwickelung von

$$(a_1 x + b_1)\ V - U$$

verschwinden müssen. Und allgemein, wenn man in

$$AV - BU$$

für A die allgemeinste Function des $(k-1)^{ten}$ und für B die allgemeinste Function des $(k-2)^{ten}$ Grades in x substituiert, deren erste k und die zweite $(k-1)$ Constanten enthält, so führt zur Bestimmung der $2\,(k-1)$ verfügbaren Constanten — da eine von ihnen durch Division auf den Werth Eins gebracht werden kann — ebenfalls die Bedingung, dass die $2\,(k-1)$ höchsten Potenzen der Unbekannten in der Entwickelung des Ausdrucks verschwinden oder dass derselbe vom Grade $(n+k-2)$ auf den Grad $(n-k)$ sich reduciert.

Man schliesst daraus, dass jede Function R_k, welche in der Form

$$AV - BU$$

ausdrückbar ist, in welcher A und B respective von den Graden $(k-1)$ und $(k-2)$ in x sind, entweder mit dem entsprechenden Sturm'schen Reste identisch oder nur durch einen constanten Factor von demselben verschieden ist.*)

*) Vergl. G. Salmon, „Lessons introductory to the modern higher Algebra.“ Dublin. 1859.

Wenn nun in Gliedern der Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

ausgedrückt die Function selbst und die erste Derivierte derselben in den Formen

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$
$$\Sigma(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$$

respective sich darstellen, so lässt sich zeigen, dass die Ausdrücke

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots,$$
$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(x-\alpha_4)\ldots,$$
etc.;

in welchen die jedesmalige Summierung sich auf alle gleichartigen Producte bezieht, deren jedes aus k von den binomischen Factoren der Function und dem Product der Quadrate sämmtlicher Differenzen aller der Wurzeln besteht, welche in diesen Factoren nicht enthalten sind, von den entsprechenden Sturm'schen Resten nur durch positive constante Factoren verschieden sind.

Zum Beweis dessen hat man für jene Ausdrücke die Form

$$AV-BU$$

und die Uebereinstimmung der Grade von A und B, als Functionen von x betrachtet, mit den nach den vorigen Erörterungen den Sturm'schen Functionen entsprechenden Graden nachzuweisen. Was zunächst jene allgemeine Form betrifft, so hat man beispielsweise für den Ausdruck

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)\ldots$$

von der Form

$$AV-BU,$$

mit A als vom ersten, B als vom zweiten Grade in x, zur Bestimmung von A die Substitution

$$x=\alpha_1$$

zu machen, als für welche derselbe in

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots$$

übergeht, während U identisch verschwindet und V auf das eine Glied, welches den Factor $(x-\alpha_1)$ nicht enthält, d. i. auf

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots$$

sich reduciert; man erhält dadurch

$$A=\Sigma(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3),$$

und da jede analoge Voraussetzung über x ein entsprechendes Resultat giebt, so erkennt man A als die symmetrische Function

$$\Sigma (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

In gleicher Weise gehen im allgemeinen Fall in die Glieder der symmetrischen Function, welche den Coefficienten A vertritt, $(k-1)$ der binomischen Factoren der Originalgleichung ein und sind multipliciert mit dem Producte der Quadrate der Differenzen aller der Wurzeln, welche in jenen Factoren enthalten sind.

Ohne bei der Bestimmung des Coefficienten B zu verweilen, kann man nun sofort die Gleichung

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (x - \alpha_4)(x - \alpha_5) \ldots$$
$$= \Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \,.\, \Sigma (x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots$$
$$+ (a_1 x + b_1)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots,$$

in welcher B in seiner allgemeinen unbestimmten Gestalt als eine Function des ersten Grades in x belassen ist, als eine Identität erweisen; dann da eine Gleichung von bestimmtem Grade nur ebenso viele Wurzeln haben kann, als dieser Grad Einheiten enthält, so muss eine Gleichung durch jeden Werth der Unbekannten erfüllt werden, d. h. eine Identität sein, sobald ihr durch eine die Zahl der Einheiten ihres Grades übersteigende Anzahl von Werthen derselben genügt wird. Die eben geschriebene Gleichung ist aber vom Grade $(n+1)$ und wird doch von $(n+2)$ Werthen der Unbekannten, nämlich von den n Wurzelwerthen der Originalgleichung

$$x = \alpha_1, \; x = \alpha_2, \; \ldots \; x = \alpha_n$$

und von zwei durch die Unbestimmtheit der Coefficienten a_1 und b_1 willkürlich wählbaren Werthen, erfüllt; also ist sie eine Identität.

Dasselbe Raissonnement gilt für den allgemeinen Fall; die dann erhaltene entsprechende Gleichung ist vom Grade $(n+k-1)$ und wird erfüllt durch die n Werthe der Wurzeln der Originalgleichung

$$x = \alpha_1, \; x = \alpha_2, \; \ldots \; x = \alpha_n$$

und überdiess durch k willkürlich wählbare Werthe, da man über k Constanten in dem allgemeinen Ausdruck von B als einer Function $(k-1)^{ten}$ Grades verfügen kann; sie ist also auch eine Identität und die wesentliche Form der Sturm'-

schen Reste für die von Sylvester gegebenen Functionen damit erwiesen.

Es bleibt übrig, die constanten Factoren zu bestimmen, durch welche sich die Letzteren von den Ersteren unterscheiden.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung

$$R_2, R_3, \ldots$$

für die Sturm'schen Reste mögen die entsprechenden Sylvester'schen Functionen durch

$$T_2, T_3, \ldots$$

bezeichnet werden und man setze

$$T_2 = \lambda_2 R_2,$$
$$T_3 = \lambda_3 R_3,$$
$$\text{etc.},$$

so dass die Grössen

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

zu bestimmen bleiben.

Die erste derselben lässt sich durch unmittelbare Vergleichung der Coefficienten der höchsten Potenzen von x auf beiden Seiten der Identität

$$\lambda_2 (Q_1 V - U) = \lambda_2 R_2 = T_2 = A_2 V - B_2 U$$

bestimmen; denn da x^n in T_2 nicht enthalten ist, während es in dem Producte $A_2 V$ aus $n x^{n-1}$ in V und nx in A_2 d. i. $\Sigma (x - \alpha_1)$ sich zusammensetzt zu $n^2 x^n$, so hat man nothwendig

$$B_2 = n^2,$$

und damit nach dem vorderen Theile der Identitätenreihe

$$\lambda_2 = n^2.$$

Man vollzieht sodann die allgemeine Bestimmung von λ_k durch folgende Schlüsse:

Es ist

$$\lambda_k \,.\, R_k = T_k = A_k \,.\, V - B_k \,.\, U;$$

da nun für den Fall der Sturm'schen Reste bewiesen ist, dass

$$A_k \,.\, B_{k+1} - A_{k+1} \,.\, B_k = 1,$$

so erhält man als Werth desselben Ausdrucks für die Sylvester'schen Functionen

$$= \lambda_k \,.\, \lambda_{k+1}.$$

Aus den Gleichungen

$$T_k \;\; = A_k \;\; . \, V - B_k \;\; . \, U,$$
$$T_{k+1} = A_{k+1} \,.\, V - B_{k+1} \,.\, U$$

erhält man aber

$$A_{k+1} \,.\, T_k - A_k \,.\, T_{k+1} = (A_k \,.\, B_{k+1} - A_{k+1} \,.\, B_k)\, U$$
$$= \lambda_k \,.\, \lambda_{k+1} \,.\, U,$$

und erkennt durch Vergleichung der Coefficienten der höchsten Potenzen von x auf beiden Seiten dieser Gleichung, in welcher das Glied

$$A_k \,.\, T_{k+1}$$

diese höchste Potenz überhaupt nicht enthält, dass das Product der leitenden Coefficienten von A_{k+1} und T_k mit

$$\lambda_k \,.\, \lambda_{k+1}$$

übereinstimmen muss. Wenn man nun setzt

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2 = p_2,$$
$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2 = p_3,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 = p_n,$$

so ergiebt sich durch Ansicht der früher gegebenen Ausdrücke der Sylvester'schen Functionen und der Werthe der Coefficienten A die Reihe der leitenden Coefficienten in T_2, T_3, T_4, etc.

$$p_2,\ p_3,\ p_4,\ \text{etc.}$$

und in A_2, A_3, A_4, etc. entsprechend

$$n,\ p_2,\ p_3,\ \text{etc.}$$

Nach der vorher aufgestellten Relation für das Product der leitenden Coefficienten in A_{k+1} und T_k hat man daher die Folge der Gleichungen

$$p_2^2 = \lambda_2 \lambda_3,$$
$$p_3^2 = \lambda_3 \lambda_4,$$
$$p_4^2 = \lambda_4 \lambda_5,$$
$$\text{etc.}$$

und somit durch

$$\lambda_2 = n^2$$

die ferneren Werthe der constanten Coefficienten

$$\lambda_3 = \frac{p_2^2}{n^2},$$

$$\lambda_4 = \frac{n^2 p_3^2}{p_2^2},$$

$$\lambda_5 = \frac{p_2^2 p_4^2}{n^2 p_3^2},$$

etc.

Man ersieht daraus, dass diese constanten Coefficienten, welche die Sylvester'schen Functionen von den Sturm'schen Resten unterscheiden, wesentlich positiv sind, und dass man daher bei der Anwendung des Sturm'schen Theorems auf die Untersuchung der Wurzeln einer Gleichung, als bei welcher es nur auf die Vorzeichenfolgen und Vorzeichenwechsel ankommt, von denselben ganz absehen, d. i. die Sylvester'schen an Stelle der Sturm'schen Functionen benutzen kann.

Für den wichtigsten ihrer practischen Zielpunkte, nämlich für die Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzelpaare und der Zahl der reellen Wurzeln einer Gleichung, nimmt damit die ganze Untersuchung eine ungemein einfache Ausdrucksform an; denn da man für dieselbe nur die Bestimmung der Coefficienten der höchsten Potenzen von x in den Sturm'schen Functionen zu vollziehen und die Zahl der Zeichenwechsel in diesen zu bestimmen hat, als mit welcher die Zahl der Paare imaginärer Wurzeln übereinstimmt, so wird diese letztere Zahl durch die Zahl der Zeichenwechsel in den leitenden Coefficienten der entsprechenden Sylvester'schen Functionen unmittelbar bestimmt. Diese leitenden Coefficienten sind aber zu den beiden, welche den Functionen U und V angehören,

$$1 \text{ und } n,$$

die folgenden

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2, \ \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2, \text{ etc.}$$

d. i. nach den Entwickelungen des Art. 10. über die symmetrischen Functionen der Quadrate der Wurzeldifferenzen

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Der Letzte derselben ist die Discriminante der vorgelegten Gleichung.*)

---

*) Vergl. oben Art. 10, p. 79.

Da man endlich die Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln in Gliedern der Coefficienten der Gleichung auszudrücken weiss, so kann man, ohne die Determinantenform zu verlassen, eben diese Coefficienten der Gleichung zur Entscheidung der erörterten Frage selbst verwenden, so dass dieselbe in allgemeinster Weise gelöst ist. Man hat — mit der Voraussetzung $a_0 = 1$ —

$$s_0 = n,$$

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n, & (n-1)\, a_1 \\ a_1, & 2 a_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3 \\ 0, & s_0, & s_1 + a_1 s_0, & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 \\ s_0, & s_1 + a_1 s_0, & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0, & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + a_3 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1, & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1, & s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 \end{vmatrix}$$

d. i. wegen

$$n = s_0, \quad (n-1)\, a_1 = s_1 + a_1 s_0,$$

$$(n-2)\, a_2 = s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0, \quad (n-3)\, a_3 = s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + a_3 s_0, \text{ etc.}$$

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3 \\ 0, & n, & (n-1)\, a_1, & (n-2)\, a_2 \\ n, & (n-1)\, a_1, & (n-2)\, a_2, & (n-3)\, a_3 \\ a_1, & 2 a_2, & 3 a_3, & 4 a_4 \end{vmatrix}; \text{ etc.}$$

Ganz dasselbe Verfahren führt im allgemeinen Falle zum Ziel, als in welchem man die Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \dots & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \dots & s_n \\ s_2, & s_3, & s_4, & \dots & s_{n+1} \\ \vdots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

in die ihr gleiche Determinante $2\,(n-1)^{ten}$ Grades

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & . & . & . & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & . & . & . & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0, & & 0, & 0, & s_0, & s_1, & . & s_{n-1} \\ . & & & 0, & s_0, & s_1, & s_2, & . \; s_n \\ . & & & s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & . \; s_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0, & s_0, & s_1, & . & . & . & . & s_{2n-4} \\ s_0, & s_1, & s_2, & . & . & . & . & s_{2n-3} \\ s_1, & s_2, & s_3, & . & . & . & . & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

verwandelt und die obigen bekannten Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung und den Summen gleicher Potenzen ihrer Wurzeln zu ihrer Umformung verwendbar macht, indem man zu ihrer zweiten Verticalreihe die mit a_1 multiplicierten entsprechenden Glieder der ersten, zur dritten die mit a_1 multiplicierten der zweiten und die mit a_2 multiplicierten der ersten, zur vierten die mit a_1 multiplicierten der dritten, die mit a_2 multiplicierten der zweiten und die mit a_3 multiplicierten der ersten hinzuaddiert, etc. Man erhält

$$\begin{vmatrix} s_0 & , s_1, \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & , s_2, \ldots & s_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , \ldots \\ 0, & 1 & , & a_1 & , & a_2 & , \\ 0, & 0 & , & 1 & , & a_1 & , \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ 0, & n & , & (n-1)a_1, & & (n-2)a_2, & \\ n, & (n-1)a_1, & & (n-2)a_2, & & (n-3)a_3, & \\ a_1, & 2a_2 & , & 3a_3 & , & 4a_4 & , \ldots \end{vmatrix}.$$

12.

Wenn man die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit den bekannten Relationen*)

$$\begin{aligned} s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + a_{n-1} s_1 + a_n s_0 &= 0, \\ s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 &= 0, \\ s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \ldots + a_{n-1} s_3 + a_n s_2 &= 0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ s_{2n-1} + a_1 s_{2n-2} + a_2 s_{2n-3} + \ldots + a_{n-1} s_n + a_n s_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

combiniert, so gehen einfach durch die Elimination der Coefficienten

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$$

aus ihnen Functionen hervor, welche die characteristischen Eigenschaften der Sturm'schen und Sylvester'schen Functionen gleichfalls besitzen; man erhält

---

*) Vergl. die Anmerkung zu Art. 6, p. 44.

$$\begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots & x, & 1 \\ s_n, & s_{n-1}, & s_{n-2}, & \ldots & s_1, & s_0 \\ s_{n+1}, & s_n, & s_{n-1}, & \ldots & s_2, & s_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ s_{2n-1}, & s_{2n-2}, & s_{2n-3}, & \ldots & s_n, & s_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Addiert man hier zu den Gliedern jeder Verticalreihe das Product des entsprechenden Gliedes der nächstfolgenden Reihe mit $-x$, so erhält man die neue gleichwerthige Form dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} s_n - x s_{n-1}, & s_{n-1} - x s_{n-2}, & \ldots & s_1 - x s_0 \\ s_{n+1} - x s_n, & s_n - x s_{n-1}, & \ldots & s_2 - x s_1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ s_{2n-1} - x s_{2n-2}, & s_{2n-2} - x s_{2n-3}, & \ldots & s_n - x s_{n-1} \end{vmatrix},$$

welche durch das Symbol V_n abkürzend bezeichnet werden mag, in dem Sinne, dass die Function V_k durch die analog gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} s_k - x s_{k-1}, & \ldots & s_1 - x s_0 \\ s_{k+1} - x s_k, & \ldots & s_2 - x s_1 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ s_{2k-1} - x s_{2k-2}, & \ldots & s_k - x s_{k-1} \end{vmatrix}$$

definiert wird. Alsdann besitzen die Functionen

$$V_n, \; V_{n-1}, \; V_{n-2}, \ldots \; V_2, \; V_1, \; 1$$

die characteristische Eigenschaft der Sturm'schen oder Sylvester'schen Functionen, nach welcher für irgend einen Werth von x, welcher die Function V_k auf Null reduciert, die Functionen V_{k+1}, V_{k-1} entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Denn es ist eine allgemeine Eigenschaft der Determinanten, dass aus den Relationen

$$V_k = \frac{d \,.\, V_{k+1}}{d(s_{k+1} - x s_k)}, \quad V_{k-1} = \frac{d^2 \,.\, V_{k+1}}{d(s_k - x s_{k-1}) \,.\, d(s_{k+1} - x s_k)},$$

welche hier erfüllt sind (indem man durch

$$\frac{d \,.\, V_{k+1}}{d(s_{k+1} - x s_k)}$$

die Partialdeterminante bezeichnet, welche aus V_{k+1} hervorgeht, indem man die Reihe und Zeile in derselben unterdrückt, welchen das Element

$$(s_{k+1}-xs_k)$$

angehört, und ebenso durch

$$\frac{d^2 \,.\, V_{k+1}}{d(s_k-xs_{k-1})\,.\,d(s_{k+1}-xs_k)}$$

diejenige, welche aus derselben ursprünglichen Determinante durch Unterdrückung der beiden Reihen und Zeilen hervorgeht, denen die Elemente

$$(s_k-xs_{k-1}) \text{ und } (s_{k+1}-xs_k)$$

angehören), sich ergiebt

$$V_{k+1}\,.\,V_{k-1}=\frac{d\,.\,V_{k+1}}{d(s_k-xs_{k-1})}\,.\,V_k-\left[\frac{d\,.\,V_{k+1}}{d(s_{k-1}-xs_{k-2})}\right]^2, \text{*)}$$

so dass für ein verschwindendes V_k das Product $V_{k+1}\,.\,V_{k-1}$ wesentlich negativ ist, als Ausdruck der vorbezeichneten characteristischen Eigenschaft.

Man ersieht aus der ursprünglichen Form der betrachteten Determinanten sehr deutlich, wie die Determinanten der Potenzensummen der Wurzeln als Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in den Functionen V_k durch ihre Zeichenwechsel über die Zahl der reellen und imaginären Wurzeln entscheiden müssen.

Aber auch die vollständigen Functionen von Sturm selbst lassen sich durch ziemlich einfache Mittel in der Form von Determinanten oder entwickelt darstellen.**)

Sei $U=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$,

V die Derivierte des Polynoms U nach x, bezeichnen R_2, R_3, etc. wie vorher die Sturm'schen Reste, so dass wie früher

$$R_2=Q_1V-U,\ R_3=Q_2R_2-V,\ R_4=Q_3R_3-R_2,\ldots$$
$$R_k=Q_{k-1}R_{k-1}-R_{k-2}$$

oder

---

*) Vergl. F. Brioschi, „Théorie des Déterminants par E. Combescure," p. 13, Gleichung 14).

**) Vergl. Brioschi in „Nouvelles Annales de Math.", t. XIII, p. 73.

$$R_2 = V N_1 - U Z_1,\ R_3 = V N_2 - U Z_2, \ldots\ R_k = V N_{k-1} - U Z_{k-1},$$

und

$$Z_{k-1} \,.\, N_{k-2} - Z_{k-2} \,.\, N_{k-1} = 1$$

ist, wenn

$$\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}$$

die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 - \ldots}}}$$

bezeichnen.

Substituiert man eine der Wurzeln der Gleichung $U=0$, z. B. α_i, in die Identität

$$R_k = V N_{k-1} - U Z_{k-1},$$

so erhalte man

$$R_k(\alpha_i) = V(\alpha_i)\, N_{k-1}(\alpha_i),$$

und hat nach den bekannten Gesetzen der Zerlegung in Brüche einerseits

$$\frac{R_k(x)}{U} = \Sigma \frac{R_k(\alpha_i)}{(x-\alpha_i)\, V(\alpha_i)} = \Sigma \frac{N_{k-1}(\alpha_i)}{x-\alpha_i},$$

anderseits

$$\Sigma \frac{R_k(\alpha_i)}{V(\alpha_i)} = 0,\quad \Sigma \frac{\alpha_i \,.\, R_k(\alpha_i)}{V(\alpha_i)} = 0,$$

$$\Sigma \frac{(\alpha_i)^{k-2} \,.\, R_k(\alpha_i)}{V(\alpha_i)} = 0,\quad \Sigma \frac{(\alpha_i)^{k-1} \,.\, R_k(\alpha_i)}{V(\alpha_i)} = C_k,$$

wo C_k der Coefficient von x^{n-k} in der Function $R_k(x)$ ist, und die Summierung sich überall auf sämmtliche Wurzeln der Gleichung erstreckt. Wegen

$$\frac{R_k(\alpha_i)}{V(\alpha_i)} = N_{k-1}(\alpha_i)$$

geben diese letzteren Formeln die Reihe der Gleichungen

$$\Sigma N_{k-1}(\alpha_i) = 0,\quad \Sigma \alpha_i N_{k-1}(\alpha_i) = 0, \ldots$$

$$\Sigma (\alpha_i)^{k-2} N_{k-1}(\alpha_i) = 0,\quad \Sigma (\alpha_i)^{k-1} N_{k-1}(\alpha_i) = C_k.$$

Setzt man nun

$$N_{k-1}(\alpha_i) = c_{k-1}\alpha^{k-1} + c_{k-2}\alpha^{k-2} + \ldots + c_1\alpha + c_0,$$

wo wegen

$$U = R_{k-1} N_{k-1} - R_k N_{k-2}$$

und nach der vorigen Bedeutung von C_k

$$C_{k-1} \,.\, c_{k-1} = 1$$

ist, so hat man mit Beibehaltung des Symbols s_r für die Summe der r^{ten} Potenzen der Wurzeln das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots \qquad & + c_{k-1} s_{k-1} = 0, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots \qquad & + c_{k-1} s_k \quad = 0, \\ & \vdots \\ c_0 s_{k-2} + c_1 s_{k-1} + \dots & + c_{k-1} s_{2k-3} = 0, \\ c_0 s_{k-1} + c_1 s_k \quad + \dots & + c_{k-1} s_{2k-2} = 0, \end{aligned}$$

und wenn

$$P_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \dots & s_k \\ \vdots \\ s_{k-1}, & s_k, & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, durch Auflösung desselben

$$c_0 = \frac{C_k}{P_k} \cdot \frac{d \,.\, P_k}{d s_{k-1}},$$

$$c_1 = \frac{C_k}{P_k} \cdot \frac{d \,.\, P_k}{d s_k}, \dots$$

$$c_{k-1} = \frac{C_k}{P_k} \cdot \frac{d \,.\, P_k}{d s_{2k-2}},$$

indem man wie vorher durch

$$\frac{d \,.\, P_k}{d s_j}$$

die durch das Verschwinden des Elements s_j und seiner Zeile und Reihe aus der Determinante P_k hervorgehende Partialdeterminante bezeichnet. Alsdann ergiebt die Relation

$$N_{k-1}(\alpha_i) = c_{k-1} \alpha^{k-1} + c_{k-2} \alpha^{k-2} + \dots + c_1 \alpha + c_0$$

die Gleichung

$$N_{k-1} = \frac{C_k}{P_k} \left(x^{k-1} \,.\, \frac{d \,.\, P_k}{d s_{2k-2}} + x^{k-2} \,.\, \frac{d \,.\, P_k}{d s_{2k-3}} + \dots + x \,.\, \frac{d . P_k}{d s_k} + \frac{d . P_k}{d s_{k-1}} \right)$$

und somit

$$\frac{C_k}{P_k} \cdot \frac{d . P_k}{d s_{2k-2}} = \frac{1}{C_{k-1}},$$

d. i.

$$C_k = \frac{1}{C_{k-1}} \cdot \frac{P_k}{P_{k-1}}$$

und weil

$$C_1 = P_1 = s_0 = n,$$

$$C_k = \left(\frac{P_2 . P_4 \ldots P_{k-2}}{P_1 . P_3 \ldots P_{k-1}}\right)^2 . P_k \text{ oder } C_k = \left(\frac{P_1 . P_3 \ldots P_{k-2}}{P_2 . P_4 \ldots P_{k-1}}\right)^2 . P_k,$$

je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Man sieht daraus, dass sowohl diese Coefficienten C, als die Nenner der successiven Näherungswerthe N mittelst der Coefficienten der Gleichung selbst ausgedrückt werden können. Sodann gelangt man leicht zur analogen Entwickelung der Sturm-schen Reste von der Formel aus

$$\frac{R_k(x)}{U} = \Sigma \frac{N_{k-1}(\alpha_i)}{x-\alpha_i}.$$

Denn indem man setzt

$$\frac{\alpha_1{}^i}{x-\alpha_1} + \frac{\alpha_2{}^i}{x-\alpha_2} + \frac{\alpha_3{}^i}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{\alpha_n{}^i}{x-\alpha_n} = v_i$$

hat man

$$\frac{P_k}{C_k} \cdot \frac{R_k}{U} = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1 & , \ldots s_{k-1} \\ s_1 & , s_2 & , \quad s_k \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ s_{k-2}, & s_{k-1}, & s_{2k-3} \\ v_0 & , v_1 & , \quad v_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Aber dieselben Voraussetzungen geben

$$v_i = x v_{i-1} - s_{i-1} \text{ und } v_0 = \frac{V}{U},$$

also durch successive Substitutionen

$$v_i U = x^i . V - (x^{i-1} s_0 + x^{i-2} s_1 + \ldots + x s_{i-2} + s_{i-1}) U$$

oder

$$a) \quad U\{v_i + a_1 v_{i-1} + a_2 v_{i-2} + \ldots + a_i v_0\} = V\{x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a \ \} \\ - U\{n x^{i-1} + (n-1) a_1 x^{i-2} + \ldots + (n-i+1) a_{i-1}\}.$$

Man hat z. B. für $k=4$

$$\frac{R_4}{U} = \left(\frac{P_2}{P_1 P_3}\right)^2 . \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ v_0, & v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{P_2}{P_1 P_2}\right)^2 . \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ 0, & v_0, & v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix},$$

und durch eine analoge Umformung wie bei der Determinante des leitenden Coefficienten in dem Falle der Aufsuchung der Zahl der Paare imaginärer Wurzeln und mit Beachtung der Gleichung a)

$$R_4 = -\left(\frac{P_2}{P_1 P_3}\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & a_1 & , a_2 & , a_3 & , a_4 \\ 0, & n & , (n-1)\,a_1, & (n-2)\,a_2, & (n-3)\,a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)\,a_2, & (n-3)\,a_3, & (n-4)\,a_4 \\ a_1, & 2a_2 & , 3a_3 & , 4a_4 & , 5a_5 \\ 0, & V & , V_1 & , V_2 & , V_3 \end{vmatrix},$$

wo durch V_1, V_2, V_3 die folgenden Ausdrücke bezeichnet sind:

$$V_1 = (x+a_1)\,V - n\,U,$$
$$V_2 = (x^2+a_1 x+a_2)\,V - \{n x + (n-1)\,a_1\}\,U,$$
$$V_3 = (x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3)\,V - \{n x^2 + (n-1)\,a_1 x + (n-2)\,a_2\}\,V.$$

Dieselbe Umformung kann auf die Bestimmung jedes anderen unter den Sturm'schen Resten angewandt werden.

Mit Hilfe der abkürzenden Symbole

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \between x, 1)^n,$$
$$V = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1} \between x, 1)^{n-1},$$
$$W = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \between x, 1)^{n-1}$$

hat Cayley*) die Reihe Sturm'scher Functionen allgemein in folgender Form gegeben

$$U,\ V,$$

$$\begin{vmatrix} V, & W \\ a_0, & a_1 \end{vmatrix},$$

$$-\begin{vmatrix} xV & , V & , xW & , W \\ a_0 & , 0 & , a_1 & , 0 \\ (n-1)\,a_1, & a_0 & , (n-1)\,a_2, & a_1 \\ (n-2)!\,a_2, & (n-1)a_1, & (n-2)!\,a_3, & (n-1)\,a_2 \end{vmatrix},$$

$$+\begin{vmatrix} x^2 V & , xV & , V & , x^2 W & , xW & , W \\ a_0 & , 0 & , 0 & , a_1 & , 0 & , 0 \\ (n-1)a_1 & , a_0 & , 0 & , (n-1)\,a_2, & a_1 & , 0 \\ (n-2)!\,a_2, & (n-1)\,a_1 & , a_0 & , (n-2)!\,a_3, & (n-1)\,a_2, & a_1 \\ (n-3)!\,a_3, & (n-2)!\,a_2, & (n-1)\,a_1 & , (n-3)!\,a_4, & (n-2)!\,a_3, & (n-1)\,a_2 \\ (n-4)!\,a_4, & (n-3)!\,a_3, & (n-2)!\,a_2, & (n-4)!\,a_5, & (n-3)!\,a_4, & (n-2)\,a_3 \end{vmatrix},$$

etc., wo wir überdiess durch die Bezeichnung

$$(n-k)!$$

die Grösse

---

*) „Philosophical Transactions," Vol. 147, 1857, p. 733.

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1.2\ldots k}$$

abkürzend vertreten haben.

Ihre entwickelten Ausdrücke sind für die Gleichung des zweiten Grades

$$(a_0,\, a_1,\, a_2 \between x, 1)^2 = 0$$
$$(a_0,\, 2a_1,\, a_2 \between x, 1)^2;$$
$$(a_0,\, a_1 \between x, 1);$$
$$-a_0 a_2 + a_1^2;$$

für die des dritten Grades

$$(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3 \between x, 1)^3 = 0$$
$$(a_0,\, 3a_1,\, 3a_2,\, a_3 \between x, 1)^3;$$
$$(a_0,\, 2a_1,\, a_2 \between x, 1)^2;$$
$$(2(a_1^2 - a_0 a_2),\; (a_1 a_2 - a_0 a_3) \between x, 1);$$
$$a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2;$$

für die des vierten Grades

$$(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4 \between x, 1)^4 = 0$$
$$(a_0,\, 4a_1,\, 6a_2,\, 4a_3,\, a_4 \between x, 1)^4;$$
$$(a_0,\, 3a_1,\, 3a_2,\, a_3 \between x, 1)^3;$$
$$(3(a_1^2 - a_0 a_2) + 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) + 3(a_1 a_3 - a_0 a_4 \between x, 1)^2;$$
$$3((3a_0^2 a_3^2 - a_0^2 a_2 a_1 + a_0 a_1^2 a_4 - 14 a_0 a_1 a_2 a_3 + 9 a_0 a_2^3 + 8 a_1^3 a_3 - 6 a_1^2 a_2^2),$$
$$(a_0^2 a_3 a_4 - 4 a_0 a_1 a_2 a_4 - a_0 a_1 a_3^2 + 3 a_0 a_2^2 a_3 + 3 a_1^3 a_4 - 2 a_1^2 a_2 a_3) \between x, 1);$$
$$a_0^3 a_4^3 - 12 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 - 18 a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 54 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 - 27 a_0^2 a_3^4$$
$$+ 54 a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 - 180 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 108 a_0 a_1 a_2 a_3^3$$
$$+ 81 a_0 a_2^4 a_4 - 54 a_0 a_2^3 a_3^2 - 27 a_1^4 a_4^2 + 108 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64 a_1^3 a_3^3$$
$$- 54 a_1^2 a_2^3 a_4 + 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2.$$ *)

III. Ueber die Resultante und die gemeinschaftlichen Wurzeln von zwei Gleichungen.

13.

Man nennt das Resultat der Elimination von m Veränderlichen zwischen m homogenen Gleichungen die Resultante**) dieser Gleichungen

---

*) Am angeführten Orte sind sie noch für die allgemeine Gleichung des 5. Grades gegeben.

**) Die Bezeichnung Resultante hat zuerst Bézout auf das Resultat der Elimination zwischen n homogenen linearen Gleichungen mit n Ver-

und kann, wie auch im Allgemeinen, so besonders für binäre Formen, die hier allein in Betracht kommen, die Bestimmung der Resultante an die Theorie der symmetrischen Functionen anknüpfen. Denn die Resultante zweier Gleichungen hat den Werth Null, wenn dieselben eine gemeinsame Wurzel besitzen; in Folge dessen muss das Product aller der Substitutionsresultate, welche man erhält, indem man die Wurzeln der ersten Gleichung an die Stelle der Unbekannten in die zweite Gleichung substituiert, nothwendig Null sein. Da diess Product aber offenbar eine symmetrische Function der Wurzeln der ersten Gleichung ist, so kann es in Function der Coefficienten derselben ausgedrückt werden und liefert alsdann die verlangte Resultante.

Werden die Gleichungen allgemein in der Form

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \dots + a_m y^m = 0,$$
$$a_0' x^n + a_1' x^{n-1} y + a_2' x^{n-2} y^2 + \dots + a_n' y^n = 0$$

angenommen und ihre Wurzeln respective durch

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_m$$

und

$$\alpha_1',\ \alpha_2',\ \alpha_3',\ \dots\ \alpha_n'$$

bezeichnet, so ist die Resultante nothwendig das Product aus n Folgen von je m binomischen Factoren

$$R = a_0^n a_0'^m (\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_2 - \alpha_1') \dots (\alpha_m - \alpha_1')(\alpha_1 - \alpha_2')(\alpha_2 - \alpha_2') \dots$$
$$(\alpha_m - \alpha_2')(\alpha_1 - \alpha_3') \dots (\alpha_m - \alpha_3') \dots (\alpha_1 - \alpha_n')(\alpha_2 - \alpha_n') \dots (\alpha_m - \alpha_n').$$

Für zwei Gleichungen zweiten Grades liefert die unmittelbare Substitution nach dem oben angegebenen Verfahren direct die Resultante, welche in Art. 2 nach ihrer Bedeutung für die Theorie der Elementargebilde erörtert worden ist.

Wenn für

$$a_0 x^2 + a_1 x y + a_2 y^2 = 0,$$
$$a_0' x^2 + a_1' x y + a_2' y^2 = 0$$

die Wurzeln der ersten Gleichung durch α_1, α_2 bezeichnet werden, so liefert die Multiplication der Resultate, welche durch ihre Substitution an Stelle der Unbekannten in die zweite entstehen, das Product

$$(a_0'\alpha_1^2 + a_1'\alpha_1 + a_2')(a_0'\alpha_2^2 + a_1'\alpha_2 + a_2'),$$

änderlichen angewandt; $R=0$ ist dann der verschwindende gemeinschaftliche Nenner der Werthe der Unbekannten, die Determinante der Coefficienten des Systems. Vergl. Art. 6, p. 46.

d. i.

$$a_0'^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + a_1'^2 \alpha_1 \alpha_2 + a_0' a_1' \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + a_0' a_2' (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$
$$+ a_1' a_2' (\alpha_1 + \alpha_2) + a_2'^2,$$

somit wegen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\frac{a_0'^2 a_2^2}{a_0^2} + \frac{a_1'^2 a_2}{a_0} - \frac{a_0' a_1' a_1 a_2}{a_0^2} + a_0' a_2' \left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0}\right) - \frac{a_1' a_2' a_1}{a_0} + a_2'^2$$

oder

$$a_0^2 a_2'^2 - 2 a_0 a_0' a_2 a_2' + a_0'^2 a_2^2 - a_0 a_1 a_1' a_2' + a_1^2 a_0' a_2' + a_0 a_2 a_1'^2 - a_1 a_2 a_0' a_1',$$

d. i.

$$(a_0 a_2' - a_0' a_2)^2 - (a_0 a_1' - a_0' a_1)(a_1 a_2' - a_1' a_2),$$

wie im Artikel 2.

Man überzeugt sich leicht, dass es dabei ganz auf dasselbe hinauskommt, ob man die Substitution der Wurzelwerthe der ersten Gleichung in die zweite oder die der Wurzelwerthe der zweiten Gleichung in die erste vollzieht. Man erhält in dem einen, wie im anderen Falle — und diess gilt ganz allgemein für die Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades — in dem Product der Substitutionsresultate das Product sämmtlicher Differenzen der Wurzeln der einen Gleichung mit den Wurzeln der anderen Gleichung, welches der Resultante gleich ist.

Man erkennt auch daraus, dass die Resultante zweier Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades in den Coefficienten derselben homogen und vom n^{ten} Grade in den Coefficienten der ersten, vom m^{ten} Grade in den Coefficienten der zweiten Gleichung ist.

Die Uebersicht des gewählten einfachen Beispiels zeigt, dass die Summe der Indices in jedem Gliede der gefundenen Resultante die nämliche und $= 4$ ist, und man darf nach den Betrachtungen des Artikels 7 erwarten, darin eine allgemeine Eigenschaft der Resultante zu finden, da dieselbe eine symmetrische Function der Wurzeln der betrachteten Gleichungen ist. Es ist in der That sehr leicht, den Nachweis derselben für die allgemeinen Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades zu führen. Denn, da die Resultante das Product sämmtlicher mn Differenzen ist, die man aus den Wur-

zeln der einen und denen der anderen Gleichung bilden kann, so wird sie mit c^{mn} multipliciert, wenn jede der Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n'$$

mit dem constanten Factor c multipliciert ist. Damit diess aber geschehe, müssen in den Coefficienten der Gleichungen

$$a_0, a_1, \ldots a_m$$

und ebenso in

$$a_0', a_1', \ldots a_n'$$

nach ihrer Natur als symmetrische Functionen der Wurzeln (Art. 6) die Factoren

$$c^0, c^1, c^2, \ldots c^m, c^n$$

respective hinzutreten, Factoren also, deren Exponenten respective mit den Indices der Coefficienten, zu welchen sie treten, identisch sind. Die Resultante der beiden Gleichungen wird also mit c^{mn} multipliciert, indem zu jedem ihrer Glieder eine Potenz von c als Factor tritt, deren Exponent mit der Summe der Indices des Gliedes übereinstimmt; diese Summe muss also constant und $= mn$, d. i. gleich dem Product der Grade beider Gleichungen sein, oder nach der Ausdrucksweise des Artikels 7, das Gewicht eines jeden Gliedes der Resultante zweier Gleichungen als Function ihrer Coefficienten ist dem Product ihrer Grade gleich.

Man kann nach diesen allgemeinen Gesetzen in jedem gegebenen Falle die litterale Form der Resultante entwickelt darstellen. Für den Fall $m = n$ schliesst man aus der Natur der Resultante als Product aller Wurzeldifferenzen auch auf die Gleichheit der numerischen Coefficienten derjenigen ihrer Glieder, welche das eine aus dem anderen durch Vertauschung der Coefficienten der einen Gleichung mit den entsprechenden der anderen oder durch Vertauschung der Coefficienten jeder Gleichung mit den von dem Mittelgliede derselben gleichweit entfernten Coefficienten der nämlichen Gleichung hervorgehen; wie es der specielle Fall der Gleichungen des zweiten Grades bestätigt, wenn man die entwickelte Gestalt der Resultante vergleicht. Die Vorzeichen solcher Glieder sind gleich oder entgegengesetzt, jenachdem die Gleichungen von einem geraden oder

ungeraden Grade sind. Für zwei Gleichungen zweiten Grades erhält man daraus die allgemeine Form der Resultante

$$A(a_0^2 a_2'^2 + a_0'^2 a_2^2) + B(a_0 a_1 a_1' a_2' + a_0' a_1' a_1 a_2)$$
$$+ C(a_0 a_1 a_1'^2 + a_0' a_1' a_1^2) + D a_0 a_2 a_0' a_2'.$$

Nach den aus der Theorie der symmetrischen Functionen gegebenen Entwickelungen muss erwartet werden, dass die Resultanten der Gleichungen in der Form von Determinanten ihrer Coefficienten erhalten werden können. Diess wird in verschiedener Weise bequem geleistet durch die von Euler und Bézout gegebenen Eliminations-Methoden, besonders in den Modificationen, die denselben durch Sylvester, Cayley und Hesse zu Theil geworden sind.

In der That, — nach dem Grundgedanken der Methode von Euler —, wenn zwei Gleichungen einen gemeinschaftlichen binomischen Factor besitzen, wie es die Resultante Null fordert, so muss dasselbe Resultat erhalten werden, ob man die erste Gleichung mit den übrig bleibenden $(n-1)$ Factoren der zweiten, oder die zweite mit den übrigen $(m-1)$ Factoren der ersten multipliciert; jene bilden eine vollständige homogene Gleichung $(n-1)^{ten}$ Grades mit neuen Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_{n-1},$$

diese eine solche $(m-1)^{ten}$ Grades mit den Coefficienten

$$A_0', A_1', A_2', \ldots A'_{m-1}$$

und die nothwendige Identität der Multiplications-Resultate liefert mn lineare Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten

$$A_0, A_1, \ldots; A_0', A_1', \ldots,$$

aus denen diese nach der Cramer'schen Regel eliminiert werden können; das Ergebniss ist die Resultante in Determinantenform.

Man erhält so für den Fall

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 = 0, \quad a_0' x^2 + a_1' xy + a_2' y^2 = 0$$

durch Multiplication mit

$$A_0 x + A_1 y, \quad A_0' x + A_1' y$$

respective

$$(A_0 x + A_1 y)(a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2) = (A_0' x + A_1' y)(a_0' x^2 + a_1' xy + a_2' y^2)$$

und die Bedingungen

$$\begin{aligned} A_0 a_0 \qquad\qquad - A_0' a_0' \qquad\quad &= 0, \\ A_0 a_1 + A_1 a_0 - A_0' a_1' - A_1' a_0' &= 0, \\ A_0 a_2 + A_1 a_1 - A_0' a_2' - A_1' a_1' &= 0, \\ A_1 a_2 \qquad\qquad - A_1' a_2' &= 0, \end{aligned}$$

also nach der Cramer'schen Regel die Resultante in der Form

$$\begin{vmatrix} a_0, & 0, & a_0', & 0 \\ a_1, & a_0, & a_1', & a_0' \\ a_2, & a_1, & a_2', & a_1' \\ 0, & a_2, & 0, & a_2' \end{vmatrix} = 0,$$

wie sie in Artikel 2 schon gegeben ward.

Einfacher in der Anwendung ist die dialytische Methode Sylvester's, welche darin besteht, dass die Gleichung des m^{ten} Grades mit x^{n-1}, $x^{n-2}\, y$, etc. und die Gleichung des n^{ten} Grades mit x^{m-1}, $x^{m-2}\, y$, etc. multipliciert und aus den erhaltenen $(m+n)$ Gleichungen die $(m+n)$ Grössen

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2}\, y,\ x^{m+n-3}\, y^2,\ \text{etc.}$$

linear eliminiert werden.

Auf die vorigen Gleichungen angewendet, erhält man

$$\begin{aligned} a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 \qquad\quad &= 0, \\ a_0 x^2 y + a_1 x y^2 + a_2 y^3 &= 0, \\ a_0' x^3 + a_1' x^2 y + a_2' x y^2 \qquad\quad &= 0, \\ a_0' x^2 y + a_1' x y^2 + a_2' y^3 &= 0, \end{aligned}$$

und dieselbe Determinante wie vorher durch die Elimination als Resultante.

Dass diese Methode zu einem mit dem der Euler'schen ersten Methode identischen Resultate führt, lässt sich in folgender Art beweisen.*)

Sind für $y = 1$

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$
$$\psi(x) = a_0' x^n + a_1' x^{n-1} + \ldots + a_n' = a_0' (x - \alpha_1')(x - \alpha_2') \ldots (x - \alpha_n')$$

---

*) Borchardt, „Vergleichung zweier Formen der Eliminations-Resultante.“ „Journal f. d. r. u. a. Math.,“ Bd. LVII, p. 183.

Einen anderen Beweis gab Hesse, „Il Determinante di Sylvester ed il Resultante di Eulero.“ „Annali di Matem. da Tortolini,“ Vol. II. 1859, p. 5, und vorher in der kritischen Zeitschrift für Mathematik (1858, p. 483). Er geht von der Vergleichung der Sylvester'schen Resultante mit der Determinante der Summen gleicher Potenzen der Wurzeln aus, welche als das Product der Quadrate aller Differenzen der Wurzeln bekannt ist.

die beiden Gleichungen, so ist nach der ersten Euler'schen Methode die Resultante

$$R = a_0^n a_0'^m \,.\, P,$$

wenn man durch P das Product aller Differenzen bezeichnet, welche je aus einer Wurzel der ersten und einer Wurzel der zweiten Gleichung sich bilden lassen; und es sind für R demnach und, wie bekannt, auch die beiden Ausdrücke statthaft

$$\begin{aligned} R &= (-1)^{mn} a_0^n \, \psi(\alpha_1)\, \psi(\alpha_2) \ldots \psi(\alpha_m) \\ &= a_0'^m \varphi(\alpha_1')\, \varphi(\alpha_2') \ldots \varphi(\alpha_n'). \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun mit

$\Pi_{1,m}$ das alternierende Differenzenproduct

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \ldots (\alpha^n - \alpha_{m-1}),$$

mit

$\Pi'_{1,n}$ ebenso das analog gebildete

$$(\alpha_2' - \alpha_1')(\alpha_3' - \alpha_1')(\alpha_4' - \alpha_1') \ldots (\alpha_n' - \alpha'_{n-1})$$

und mit D die Determinante $(m+n)^{ter}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1', & \alpha_1'^2, & \ldots & \alpha_1'^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_2', & \alpha_2'^2, & \ldots & \alpha_2'^{m+n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1, & \alpha_n', & \alpha_n'^2, & \ldots & \alpha_n'^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^{m+n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1, & \alpha_m, & \alpha_m^2, & \ldots & \alpha_m^{m+n-1} \end{vmatrix},$$

d. i. das alternierende Differenzenproduct aller der Grössen

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m,$$

so hat man

$$D = (-1)^{mn} \Pi_{1,m} \,.\, \Pi'_{1,n} \,.\, P.$$

Nach der zweiten Euler'schen oder Sylvester's dialytischer Methode erhält man als Resultante die Determinante $(m+n)^{ter}$ Ordnung

$$T=\left|\begin{array}{llllllll}
a_m, & a_{m-1}, & \ldots & a_0, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\
0, & a_m, & \ldots & a_1, & a_0, & 0, & \ldots & 0 \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
0, & 0, & \ldots & \ldots & 0, & a_m, & a_{m-1}, \ldots & a_0 \\
a_n', & a_{n-1}', & \ldots & \ldots & a_1', & a_0', & 0, \ldots & 0 \\
0, & a_n', & \ldots & \ldots & & a_1', & a_0', \ldots & 0 \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
0, & 0, & \ldots & 0, & a_n', & a_{n-1}', & \ldots & a_0'
\end{array}\right|,$$

als in welcher die 1., 2., … $(n-1)^{te}$, n^{te}, $(n+1)^{te}$ und $(m+n-1)^{te}$ Linie von Elementen angedeutet worden sind.

Man erkennt alsdann die Identität von R und T, indem man die beiden Determinanten D und T nach der gewöhnlichen Regel multipliciert; denn diese Multiplication ergiebt

$$D.T=\left|\begin{array}{llllll}
\varphi(\alpha_1'), & \alpha_1'\varphi(\alpha_1'), \ldots & \alpha_1'^{n-1}\varphi(\alpha_1'), & 0, & 0, \ldots & 0 \\
\varphi(\alpha_2'), & \alpha_2'\varphi(\alpha_2'), \ldots & \alpha_2'^{n-1}\varphi(\alpha_2'), & 0, & 0, \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\varphi(\alpha_n'), & \alpha_n'\varphi(\alpha_n'), \ldots & \alpha_n'^{n-1}\varphi(\alpha_n'), & 0, & 0, \ldots & 0 \\
0, & 0, \ldots & 0, & \psi(\alpha_1), & \alpha_1\psi(\alpha_1), \ldots & \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1) \\
0, & 0, \ldots & 0, & \psi(\alpha_2), & \alpha_2\psi(\alpha_2), \ldots & \alpha_2^{m-1}\psi(\alpha_2) \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
0, & 0, \ldots & 0, & \psi(\alpha_m), & \alpha_m\psi(\alpha_m), \ldots & \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha^m)
\end{array}\right|,$$

oder, wenn man für die Determinante rechts ihren Werth setzt,

$$\begin{aligned}
D.T &= \Pi_{1,m}.\Pi'_{1,n}.\varphi(\alpha_1')\,\varphi(\alpha_2')\ldots\varphi(\alpha_n').\psi(\alpha_1).\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) \\
&= (-1)^{mn}\,a_0^n a_0'^m.\Pi_{1,m}.\Pi'_{1,n}.P^2,
\end{aligned}$$

und somit wegen

$$D=(-1)^{mn}.\Pi_{1,m}.\Pi'_{1,n}.P,$$
$$T=a_0^n a_0'^m.P,$$

d. i.

$$T=R,$$

wodurch die Identität erwiesen ist.

14.

Dagegen führt die Bézout-Cayley'sche Methode direct zu jener einfacheren Determinantenform, welcher die Resultante nach dem Beispiel derjenigen von zwei Gleichungen zweiten Grades fähig ist; nämlich für diese, wie aus Artikel 2 zu ersehen,

$$\begin{vmatrix} a_0 a_2' - a_0' a_2, & a_0 a_1' - a_0' a_1 \\ a_1 a_2' - a_1' a_2, & a_0 a_2' - a_0' a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Methode mag an zwei Gleichungen des fünften Grades

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 y + a_2 x^3 y^2 + a_3 x^2 y^3 + a_4 x y^4 + a_5 y^5 = 0,$$
$$a_0' x^5 + a_1' x^4 y + a_2' x^3 y^2 + a_3' x^2 y^3 + a_4' x y^4 + a_5' y^5 = 0$$

erläutert werden. Man multipliciert die erste Gleichung mit a_0', die zweite mit a_0 und bildet durch Subtraction und nachherige Division mit y die Gleichung

$$(a_0' a_1 - a_0 a_1') x^4 + (a_0' a_2 - a_0 a_2') x^3 y + (a_0' a_3 - a_0 a_3') x^2 y^2$$
$$+ (a_0' a_4 - a_0 a_4') x y^3 + (a_0' a_5 - a_0 a_5') y^4 = 0,$$

welche durch Anwendung der abgekürzten Bezeichnung*)

$$(a_0 a_1'),\ (a_0 a_2'),\ \text{etc.}$$

für die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ a_0', & a_1' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_0, & a_2 \\ a_0', & a_2' \end{vmatrix},\ \text{etc.},$$

die als Coefficienten in dieser Gleichung figurieren, in der Form

$$(a_0 a_1') x^4 + (a_0 a_2') x^3 y + (a_0 a_3') x^2 y^2 + (a_0 a_4') x y^3 + (a_0 a_5') y^4 = 0$$

geschrieben werden kann. Auf dieselbe Weise liefert die Multiplication der ersten Gleichung mit $(a_0' x + a_1' y)$, der zweiten mit $(a_0 x + a_1 y)$, die Subtraction und nachherige Division mit y^2 die Gleichung

$$(a_0 a_2') x^4 + ((a_0 a_3') + (a_1 a_2')) x^3 y + ((a_0 a_4') + (a_1 a_3')) x^2 y^2$$
$$+ ((a_0 a_5') + (a_1 a_4')) x y^3 + (a_1 a_5') y^4 = 0.$$

Ebenso entspringt aus der Multiplication der Gleichungen respective mit

$$(a_0' x^2 + a_1' x y + a_2' y^2),\ (a_0 x^2 + a_1 x y + a_2 y^2),$$

Subtraction und Division mit y^3 die Gleichung

$$(a_0 a_3') x^4 + ((a_0 a_4') + (a_1 a_3')) x^3 y + ((a_0 a_5') + (a_1 a_4') + (a_2 a_3')) x^2 y^2$$
$$+ ((a_1 a_5') + (a_2 a_4')) x y^3 + (a_2 a_5') y^4 = 0,$$

und die Fortsetzung der Operationen nach demselben Gesetze fügt den Vorigen noch die beiden Gleichungen

---

*) Vergl. Sylvester, „On a Theory of the Syzygetic Relations" etc. „Philos. Trans." Vol. 143. (1853.)

$$(a_0 a_4') x^4 + \big((a_0 a_5') + (a_1 a_4')\big) x^3 y + \big((a_1 a_5') + (a_2 a_4')\big) x^2 y^2 \\ + \big((a_2 a_5') + (a_3 a_4')\big) x y^3 + (a_3 a_5') y^4 = 0,$$

$$(a_0 a_5') x^4 + (a_1 a_5') x^3 y + (a_2 a_5') x^2 y^2 + (a_3 a_5') x y^3 + (a_4 a_5') y^4 = 0.$$

Aus den fünf so gebildeten Gleichungen lassen sich aber die Grössen

$$x^4,\ x^3 y,\ x^2 y^2,\ x y^3,\ y^4$$

linear eliminieren und man erhält die Resultante in der Form

$$\begin{vmatrix} (a_0 a_1'), & (a_0 a_2') & , (a_0 a_3') & , (a_0 a_4') & , (a_0 a_5') \\ (a_0 a_2'), & (a_0 a_3') + (a_1 a_2'), & (a_0 a_4') + (a_1 a_3') & , (a_0 a_5') + (a_1 a_4'), & (a_1 a_5') \\ (a_0 a_3'), & (a_0 a_4') + (a_1 a_3'), & (a_0 a_5') + (a_1 a_4') + (a_2 a_3'), & (a_1 a_5') + (a_2 a_4'), & (a_2 a_5') \\ (a_0 a_4'), & (a_0 a_5') + (a_1 a_4'), & (a_1 a_5') + (a_2 a_4'), & (a_2 a_5') + (a_3 a_4'), & (a_3 a_5') \\ (a_0 a_5'), & (a_1 a_5'), & (a_2 a_5'), & (a_3 a_5'), & (a_4 a_5') \end{vmatrix} = 0;$$

eine Determinante fünften Grades in ihren Elementen, während die vorigen Methoden eine Determinante zehnten Grades liefern müssten.

Dieselbe Methode überträgt sich ohne Schwierigkeit auf Gleichungen verschiedener Grade, wenn man beachtet, dass es immer nur darauf ankommt, durch Multiplicationen der angezeigten Art und Subtraction der Producte solche Gleichungen in hinreichender Anzahl zu bekommen, aus denen man die Potenzen der Veränderlichen linear eliminieren kann. Für $n > m$ erhält man n Gleichungen vom $(n-1)^{ten}$ Grade; in der Resultante selbst enthält jede Reihe die Coefficienten der Gleichung vom niedern und nur m Reihen enthalten die Coefficienten der Gleichung vom höhern Grade, wie es nach dem allgemeinen Gesetze ihres Grades in den Coefficienten beider Gleichungen sein muss. Man kann die $(n-m)$ Glieder, welche der Gleichung des niederen Grades gegen die des höheren fehlen, als mit dem Coefficienten Null behaftet einführen und nach dem allgemeinen Schema für Gleichungen desselben Grades verfahren. Eben diess aber fordert noch einige Bemerkungen, die zu einer völlig mechanischen Anwendung desselben führen können. Die Determinante, welche die Resultante darstellt, ist symmetrisch in Bezug auf die von oben links nach unten rechts, d. i. die dem Anfangsglied ihrer Entwickelung entsprechende Diagonale. Ihren Bau, sowie den der analogen Formen, welche anderen Graden entsprechen, übersieht man vielleicht noch besser, wenn man die Abkürzung des Ausdrucks für die ihre Elemente zusammensetzenden Determinanten zweiten

Grades noch dadurch erhöht, dass man nur die Indices der in dieselben eintretenden Coefficienten beibehält, also

$$(0,1),\ (1,2)\ \text{etc. statt}\ \begin{vmatrix} a_0, a_1 \\ a_0', a_1' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ a_1', a_2' \end{vmatrix}\ \text{etc.}$$

Man hat dann für die eben erhaltene Resultante der Gleichungen fünften Grades die Gestalt

$$\begin{vmatrix} (0,1), & (0,2) , & (0,3) , & (0,4) , & (0,5) \\ (0,2), & (0,3)+(1,2), & (0,4)+(1,3) , & (0,5)+(1,4), & (1,5) \\ (0,3), & (0,4)+(1,3), & (0,5)+(1,4)+(2,3), & (1,5)+(2,4), & (2,5) \\ (0,4), & (0,5)+(1,4), & (1,5)+(2,4) , & (2,5)+(3,4), & (3,5) \\ (0,5), & (1,5) , & (2,5) , & (3,5) , & (4,5) \end{vmatrix},$$

und für die der Gleichungen sechsten Grades

$$\begin{vmatrix} (0,1), & (0,2) , & (0,3) , & (0,4) , & (0,5) , & (0,6) \\ (0,2), & (0,3)+(1,2), & (0,4)+(1,3) , & (0,5)+(1,4) , & (0,6)+(1,5), & (1,6) \\ (0,3), & (0,4)+(1,3), & (0,5)+(1,4)+(2,3), & (0,6)+(1,5)+(2,4), & (1,6)+(2,5), & (2,6) \\ (0,4), & (0,5)+(1,4), & (0,6)+(1,5)+(2,4), & (1,6)+(2,5)+(3,4), & (2,6)+(3,5), & (3,6) \\ (0,5), & (0,6)+(1,5), & (1,6)+(2,5) , & (2,6)+(3,5) , & (3,6)+(4,5), & (4,6) \\ (0,6), & (1,6) , & (2,6) , & (3,6) , & (4,6) , & (5,6) \end{vmatrix}$$

etc.

Man kann diese Determinante als durch concentrische und parallele Uebereinanderschichtung quadratischer Etagen aus einfachen Elementen entstanden ansehen und gelangt dadurch zu einem höchst einfachen Bildungsgesetze. Die Resultante für den Fall $n=5$ ist gebildet aus den drei Schichten

$$\begin{matrix} (0,1), & (0,2), & (0,3), & (0,4), & (0,5) \\ (0,2), & (0,3), & (0,4), & (0,5), & (1,5) \\ (0,3), & (0,4), & (0,5), & (1,5), & (2,5) \\ (0,4), & (0,5), & (1,5), & (2,5), & (3,5) \\ (0,5), & (1,5), & (2,5), & (3,5), & (4,5) \end{matrix}\ ,$$

$$\begin{matrix} (1,2), & (1,3), & (1,4) \\ (1,3), & (1,4), & (2,4) \\ (1,4), & (2,4), & (3,4) \end{matrix}\ ;$$

$$(2,3).$$

In jeder derselben enthält die die Symmetrieachse der Resultante kreuzende Diagonale der Schicht lauter gleiche Elemente, und zwar in der untersten

$$(0, n),$$

in der zweiten

$$(1, \overline{n-1}),$$

in der dritten

$$(2, \overline{n-2}) \text{ etc.},$$

in der letzten also

$$(k, k+1),$$

wenn

$$k = \frac{n-2}{2}$$

für ein gerades n,

$$k = \frac{n-1}{2}$$

für ein ungerades n gesetzt ist.

Darnach ist die Bildung dieser Schichten völlig mechanisch zu gestalten; ihre Anzahl ist $(k+1)$. Für ein ungerades $n = 2k+1$ besteht die oberste derselben, — wenn man das körperliche Bild einer quadratischen Pyramide der Anschauung zu Grunde legt, — aus dem einfachen Elemente

$$(k, \overline{k+1}),$$

für ein gerades $n = 2(k+1)$ aber aus dem Quadrat der vier Elemente

$$\begin{matrix} (k, \overline{k+1}), & (k, \overline{k+2}) \\ (k, \overline{k+2}), & (\overline{k+1}, \overline{k+2}). \end{matrix}$$

Die Resultante für $n = 6$ besteht also aus den folgenden drei Schichten

$$\begin{matrix} (0,1), & (0,2), & (0,3), & (0,4), & (0,5), & (0,6) \\ (0,2), & (0,3), & (0,4), & (0,5), & (0,6), & (1,6) \\ (0,3), & (0,4), & (0,5), & (0,6), & (1,6), & (2,6) \\ (0,4), & (0,5), & (0,6), & (1,6), & (2,6), & (3,6) \\ (0,5), & (0,6), & (1,6), & (2,6), & (3,6), & (4,6) \\ (0,6), & (1,6), & (2,6), & (3,6), & (4,6), & (5,6) \end{matrix} ;$$

$$\begin{matrix} (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5) \\ (1,3), & (1,4), & (1,5), & (2,5) \\ (1,4), & (1,5), & (2,5), & (3,5) \\ (1,5), & (2,5), & (3,5), & (4,5) \end{matrix} ;$$

$$\begin{matrix} (2,3), & (2,4) \\ (2,4), & (3,4) \end{matrix} ;$$

durch deren Uebereinanderschichtung entsteht wieder die vorher gegebene Form der Resultante. Man mag als eine andere Fassung des Vorhergehenden anmerken, *dass diese verschiedenen Schichten dem nämlichen Bildungs-*

gesetze angewandt auf verschiedene Gleichungen entsprechen; zuerst nämlich auf das System der Originalgleichungen, dann auf das System derjenigen Gleichungen, die aus ihnen hervorgehen, indem man in beiden die Coefficienten der ersten und letzten Glieder gleich Null setzt; auf das System der Gleichungen, die aus diesen letzteren ebenso abgeleitet werden, wie diese aus den Originalgleichungen, etc.

Cayley hat diese Methode in einer etwas geänderten Gestalt dargelegt. Wenn die Gleichungen

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots = 0,$$
$$a_1' x^n + a_1' x^{n-1} y + a_2' x^{n-2} y^2 + \ldots = 0$$

durch

$$U = 0, \quad V = 0$$

abkürzend vertreten werden, so muss, die Existenz einer gemeinschaftlichen Wurzel vorausgesetzt, die lineare Verbindung derselben

$$U + \lambda V = 0$$

unabhängig von λ zu einer Identität werden; bezeichnet man aber durch x_1, y_1 specielle Werthe der Veränderlichen und durch U_1, V_1 die Resultate der Substitution derselben in die Polynome U und V, so muss demnach die Gleichung

$$U V_1 - U_1 V = 0$$

unabhängig von x_1, y_1 identisch sein. Sie ist aber nothwendig durch

$$x y_1 - x_1 y$$

theilbar; wenn man diese Division vollzieht und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x_1 und y_1 einzeln mit Null vergleicht, so kann man die Potenzen von x und y aus den so erhaltenen Gleichungen als unabhängige Veränderliche eliminieren und erhält die Resultante in ganz derselben Form wie vorher.

Man findet für

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4 = 0,$$
$$a_0' x^4 + a_1' x^3 y + a_2' x^2 y^2 + a_3' x y^3 + a_4' y^4 = 0$$

$$\frac{(a_0 x^4 + \ldots)(a_0' x_1^4 + \ldots) - (a_0' x^4 + \ldots)(a_0 x_1^4 + \ldots)}{x y' - x' y}$$

$$\begin{aligned}
= &\{(a_0 a_1') x^3 + (a_0 a_2') x^2 y + (a_0 a_3') x y^2 + (a_0 a_4') y^3\} x_1^3 + \\
&\{(a_0 a_2') x^3 + [(a_0 a_3') + (a_1 a_2')] x^2 y + [(a_0 a_4') + (a_1 a_3')] x y^2 + (a_1 a_4') y^3\} x_1^2 y_1 + \\
&\{(a_0 a_3') x^3 + [(a_0 a_4') + (a_1 a_3')] x^2 y + [(a_1 a_4') + (a_2 a_3')] x y^2 + (a_2 a_4') y^3\} x_1 y_1^2 + \\
&\{(a_0 a_4') x^3 + (a_1 a_4') x^2 y + (a_2 a_4') x y^2 + (a_3 a_4') y^3\} y_1^3,
\end{aligned}$$

und durch Elimination der Grössen

$$x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3$$

zwischen den einzeln mit Null verglichenen Coefficienten dieser Gleichung in x_1, y_1 die Resultante

$$= \begin{vmatrix} (a_0 a_1'), & (a_0 a_2') & , (a_0 a_3') & , (a_0 a_4') \\ (a_0 a_2'), & (a_0 a_3') + (a_1 a_2'), & (a_0 a_4') + (a_1 a_3'), & (a_1 a_4') \\ (a_0 a_3'), & (a_0 a_4') + (a_1 a_3'), & (a_1 a_4') + (a_2 a_3'), & (a_2 a_4') \\ (a_0 a_4'), & (a_1 a_4') & , (a_2 a_4') & , (a_3 a_4') \end{vmatrix}.$$

Man sieht, wie alle diese Methoden darauf hinaus kommen, das allgemeine Problem der Elimination zwischen zwei Gleichungen beliebigen Grades auf das specielle und einfache der Elimination zwischen linearen Gleichungen zurückzuführen.

An die Cayley'sche Darstellung der Resultante hat Borchardt den Nachweis geknüpft, dass die Resultante auch bestimmt werden kann aus den $2(n+1)$ Werthen, welche die gegebenen Functionen für beliebige $(n+1)$ bestimmte Werthe der in ihr erhaltenen Unbekannten annehmen. Zur Vereinfachung der Ausdrücke sei $y = 1$, so dass die Gleichungen in der Gestalt

$$\varphi(x) = 0,\quad \psi(x) = 0$$

vorausgesetzt werden dürfen. Sie werden als von demselben Grade n gedacht,

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$$

sind die $(n+1)$ speciellen Werthe von x und

$$\varphi(\alpha_0),\ \varphi(\alpha_1),\ \ldots,\ \varphi(\alpha_n);\ \psi(\alpha_0),\ \psi(\alpha_1),\ \ldots,\ \psi(\alpha_n)$$

sind die durch Substitution derselben entspringenden Werthe der Formen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Setzt man alsdann nach der Cayley'schen Darstellung der Resultante

$$F(x, x') = \frac{\varphi(x)\psi(x') - \varphi(x')\psi(x)}{x - x'} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_{i,j}\, x^i x'^j,$$

so ist die Resultante durch die Determinante

$$R = \Sigma \pm b_{0,0} b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n-1,n-1}$$

ausgedrückt.

Bezeichnet man alsdann durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ n beliebige Grössen, und setzt abkürzend

$$p_i(x_j) = b_{0,i} + b_{1,i} x_j + b_{2,i} x_j^2 + \ldots + b_{n-1,i} x_j^{n-1},$$

so liefert die Multiplication der Determinante R mit der Determinante

$$\Pi = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & \dots & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & x_n, & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

d. i. dem Product aller Differenzen der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$, das Product

$$R\,\Pi = \begin{vmatrix} p_0(x_1) & , p_0(x_2) & , \dots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & , p_1(x_2) & , \dots & p_1(x_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ p_{n-1}(x_1), & p_{n-1}(x_2), & \dots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

Sind aber $x_1', x_2', \dots x_n'$ n beliebige andere Grössen und ist

$$\Pi' = \begin{vmatrix} 1, & x_1', & \dots & x_1'^{n-1} \\ 1, & x_2', & \dots & x_2'^{n-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & x_n', & \dots & x_n'^{n-1} \end{vmatrix},$$

so liefert die Multiplication der vorigen mit dieser neuen Determinante das Product

$$R.\Pi.\Pi' = \Sigma \pm F(x_1, x_1')\, F(x_2, x_2') \dots F(x_n, x_n').$$

Nun sind im gegenwärtigen Falle die Werthe von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für

$$x = \alpha_0, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; \dots \; \alpha_n$$

gegeben.

Ist also

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n),$$

so erhält man die interpolatorischen Darstellungen

$$\varphi(x) = \sum_0^n {}_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \cdot \frac{f(x)}{(x - \alpha_i)},$$

$$\psi(x) = \sum_0^n {}_i \frac{\psi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \cdot \frac{f(x)}{(x - \alpha_i)},$$

und daher

$$F(x,x')=\frac{\varphi(x)\,\psi(x')-\varphi(x')\,\psi(x)}{x-x'}$$

$$=\sum_0^n{}_i\sum_0^n{}_j\frac{\alpha_i-\alpha_j}{f'(\alpha_i).f'(\alpha_j)}[\varphi(\alpha_i)\psi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_j)\psi(\alpha_i)]\frac{f(x)}{(x-\alpha_i)(x-\alpha_j)}\cdot\frac{f(x')}{(x'-\alpha_i)(x'-\alpha_j)}.$$

Daraus entspringt für

$$x=\alpha_i,\ x'=\alpha_j,\ \text{oder}\ x=\alpha_j,\ x'=\alpha_i,$$

so lange i und j verschieden sind,

$$F(\alpha_i,\alpha_j)=F(\alpha_j,\alpha_i)=\frac{\varphi(\alpha_i)\,\psi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_j)\,\psi(\alpha_i)}{\alpha_j-\alpha_i},$$

aber für $i=j$

$$F(\alpha_i,\alpha_i)=-\sum_0^n{}_i\frac{f'(\alpha_i)}{f'(\alpha_j)}\frac{\varphi(\alpha_i)\,\psi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_j)\,\psi(\alpha_i)}{\alpha_j-\alpha_i}=-\sum_0^n{}_j\frac{f'(\alpha_i)}{f'(\alpha_j)}.F(\alpha_i,\alpha_j),$$

die Summierung als über alle Glieder sich erstreckend gedacht, für welche i und j verschieden sind.

Mit Hilfe der abkürzenden Bezeichnung

$$\frac{\varphi(\alpha_i)\,\psi(\alpha_j)-\varphi(\alpha_j)\,\psi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)\,f'(\alpha_j)\,.\,(\alpha_j-\alpha_i)}=(i\,j)$$

entspringt aus der ersten der beiden vorigen Gleichungen

$$(i\,j)=\frac{F(\alpha_i,\alpha_j)}{f'(\alpha_i)\,f'(\alpha_j)}=(j\,i),$$

und aus der zweiten

$$(i\,i)=\frac{F(\alpha_i,\alpha_i)}{f'^2(\alpha_i)}=-\sum_0^n{}_j(i\,j),$$

und durch die Letztere überdiess

$$(i0)+(i1)+(i2)+\ldots\ +(i\,n)=0,$$

wenn i nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ annimmt.

Mit den so gewonnenen Darstellungen der Functionen

$$F(\alpha_i,\alpha_j)\ \text{und}\ F(\alpha_i,\alpha_i)$$

kehrt man nun zu der früher gewonnenen Gleichung

$$R\,.\,\Pi\,.\,\Pi'=\Sigma\pm F(x_1,x_1')\,F(x_2,x_2')\ldots F(x_n,x_n')$$

zurück; sie geht durch die Substitutionen

$$x_1=x_1'=\alpha_1,\ x_2=x_2'=\alpha_2,\ \ldots\ x_n=x_n'=\alpha_n$$

und für

$$\Pi_{1,n}=(\alpha_1-\alpha_2)\,(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

in die folgende über

$$R\,.\,\Pi_{1,n}^2=\Sigma\pm F(\alpha_1,\alpha_1)\ F(\alpha_2,\alpha_2)\ \ldots\ F(\alpha_n,\alpha_n),$$

d. i. durch Einsetzen der vorher entwickelten Werthe

$$R\,.\,\Pi_{1,n}^2=f'^2(\alpha_1)\,f'^2(\alpha_2)\ldots f'^2(\alpha_n)\ \Sigma\pm(11)\,(22)\ldots(nn),$$

endlich aber durch Multiplication beider Seiten dieser Gleichung mit

$$f'^2(\alpha_0) = (\alpha_0 - \alpha_1)^2 (\alpha_0 - \alpha_2)^2 \ldots (\alpha_0 - \alpha_n)^2$$

und für

$$\Pi_{0,n}^2 = \{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2) \;\ldots\; (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\}^2$$

$$R = \Pi_{0,n}^2 \,.\, \Sigma \pm (11)\,(22) \;\ldots\; (nn)$$

als Darstellung der Eliminationsresultante in einer der Interpolation entsprechenden Form.*)

Diese Darstellung enthält die früher gegebene Euler'sche als einen speciellen Fall und giebt damit zugleich den Nachweis von der wesentlichen Identität der Bezout-Cayley'schen Eliminationsmethode mit der ursprünglichen von Euler.

Man betrachte dazu die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als die Wurzeln der Gleichung

$$\psi(x) = 0;$$

dann erkennt man aus dem allgemeinen Werth von $(i\,j)$, dass

$$(i\,j) = 0$$

ist für alle ungleichen und von Null verschiedenen Werthe i, j, während man aus der allgemeinen Definition von $(i\,i)$ findet

$$(i\,i) = -(i\,0).$$

In Folge dessen geht die Gleichung

$$R = \Pi_{0,n}^2 \,.\, \Sigma \pm (1\,1)\,(2\,2) \;\ldots\; (n\,n)$$

in

$$R = (-1)^n.\, \Pi_{0,n}^2\, (1\,0)\,(2\,0) \;\ldots\; (n\,0)$$

über und da man für alle $i > 0$ mittelst der Relation

$$\psi(x) = a_0'\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \;\ldots\; (x - \alpha_n)$$

näher erhält

$$(i\,0) = a_0' \frac{\varphi(\alpha_i)}{(\alpha_0 - \alpha_i)\, f'(\alpha_i)},$$

*) Man vergleiche zur weiteren Ausführung die Abhandlung selbst in „Crelle's Journal", Bd. LVII, p. 111. Ueberdiess aber desselben Autors schöne Arbeit in den „Abhandlungen der K. Ak. d. W. zu Berlin" 1860: Ueber eine Interpolationsformel für eine Art symmetrischer Functionen und über deren Anwendung.

so ergiebt sich endlich die mit der älteren Euler'schen übereinstimmende Darstellung der Resultante

$$R = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0'^n \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n).$$

15.

Die entwickelte Darstellung einer solchen Resultante ist in jedem Falle, in welchem der Grad der Gleichungen den zweiten übersteigt, eine umfängliche wenn auch nicht schwierige Operation. Sie kann ausgeführt werden, ebensowohl indem man von der Determinantenform derselben, sei es nun nach der durch die Methoden von Euler und Sylvester, oder nach der durch die Methoden von Bezout und Cayley erhaltenen, als auch indem man von ihrer Natur als symmetrische Function der Wurzeln ausgeht und sich der Tafeln der symmetrischen Functionen bedient, wie sie früher gegeben worden sind. Das folgende Beispiel ist zunächst der letzteren Berechnungsweise gewidmet.

Man habe die Gleichungen

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3 = 0,$$
$$(a_0', a_1', a_2' \between x, y)^2 = 0;$$

so setze man $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als die Wurzeln der ersten Gleichung, so dass unter Anwendung der Bezeichnungsweise des Art. 8 die Relationen

$$-\frac{a_1}{a_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad = (1),$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = (1^2),$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \qquad = (1^3)$$

gelten; alsdann ist die Resultante das Product

$$(a_0', a_1', a_2' \between \alpha_1, 1)^2 . (a_0', a_1', a_2' \between \alpha_2, 1)^2 . (a_0', a_1', a_2' \between \alpha_3, 1)^2$$

oder

$$a_2'^3 + a_1'a_2'^2(1) + a_0'a_2'^2(2) + a_1'^2a_2'(1^2) + a_0'a_1'a_2'(21) + a_1'^3(1^3)$$
$$+ a_0'^2a_2'(2^2) + a_0'a_1'^2(21^2) + a_0'^2a_1'(2^21) + a_0'^3(2^3),$$

d. i. durch Division mit $a_2'^3$

$$1 + \frac{a_1'}{a_2'}(1) + \frac{a_0'}{a_2'}(2) + \frac{a_1'^2}{a_2'^2}(1^2) + \frac{a_0'a_1'}{a_2'^2}(21) + \frac{a_1'^3}{a_2'^3}(1^3) + \frac{a_0'^2}{a_2'^2}(2^2)$$
$$+ \frac{a_0'a_1'^2}{a_2'^3}(21^2) + \frac{a_0'^2a_1'}{a_2'^3}(2^21) + \frac{a_0'^3}{a_2'^3}(2^3),$$

welches durch die von Cayley vorgeschlagene Symbolik

$$\frac{a_1'}{a_2'}=[1],\ \frac{a_0'}{a_2'}=[2],\ \left(\frac{a_1'}{a_2'}\right)^2=[1^2],\ \frac{a_0'a_1'}{a_2'^2}=[21],\ \text{etc.}$$

in der regelmässigen Form

$$1+[1](1)+[2](2)+[1^2](1^2)+[21](21)+[1^3](1^3)+[2^2](2^2)+[21^2](21^2)$$
$$+[2^21](2^21)+[2^3](2^3)$$

erscheint, in der das einfache Gesetz herrscht, dass die in den Parenthesen auftretenden Ziffern sämmtliche Vertheilungen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden, für welche 2 der grösste Theil und 3 die grösste Anzahl der Theile ist.

Man erhält im allgemeinen Falle zweier Gleichungen m^{ten} und n^{ten} Grades alle Vertheilungen der Zahlen

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ mn,$$

für welche n der grösste Theil und m die grösste Anzahl der Theile ist.

Alle Theile dieses Ausdruckes lassen sich direct aus den Tafeln entnehmen, welche die Ausdrücke der symmetrischen Functionen der Wurzeln in Gliedern der Coefficienten angeben; das gewählte Beispiel würde die bezüglichen Tafeln unter I bis VI erfordern, so zwar, dass Tafel I, V, VI je ein Glied, Tafel II, III, IV aber je zwei Glieder der Entwickelung liefern. Die dort gemachte Voraussetzung $a_0=1$ ändert nichts Wesentliches, das Gesetz der Homogenität der Resultante lehrt überall die fehlenden Factoren hinzufügen.

Die entwickelten Resultate prüft man mit Hilfe der Differentialgleichungen, welche als allgemeine Eigenschaften der Resultante im folgenden Artikel abgeleitet werden, auf ihre Genauigkeit.

Die Entwickelung der Resultante lässt sich aber, wie es Cayley*) besonders bequem dargestellt hat, ebenso auch an ihre Determinantenform in der Euler-Sylvester'schen Gestalt anschliessen.

Dem vorigen Beispiel entspricht alsdann die Determinante

---

*) „Philosoph. Transactions", 1857, p. 703. „Memoir on the Resultant of a System of two Equations."

$$\begin{vmatrix} 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & a_0', & a_1', & a_2' \\ 0, & a_0', & a_1', & a_2', & 0 \\ a_0', & a_1', & a_2', & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man die aus der Entwickelung von

$$\begin{vmatrix} 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & 0 \end{vmatrix}$$

hervorgehenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 0, & a_0 \\ a_0, & a_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0, & a_1 \\ a_0, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0, & a_2 \\ a_0, & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & a_3 \\ a_0, & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ a_1, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_2 \\ a_1, & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_3 \\ a_1, & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ a_2, & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ a_2, & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ a_3, & 0 \end{vmatrix}$$

durch die Symbole

12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45

respective und ebenso die aus der Entwickelung von

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & a_0', & a_1', & a_2' \\ 0, & a_0', & a_1', & a_2', & 0 \\ a_0', & a_1', & a_2', & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

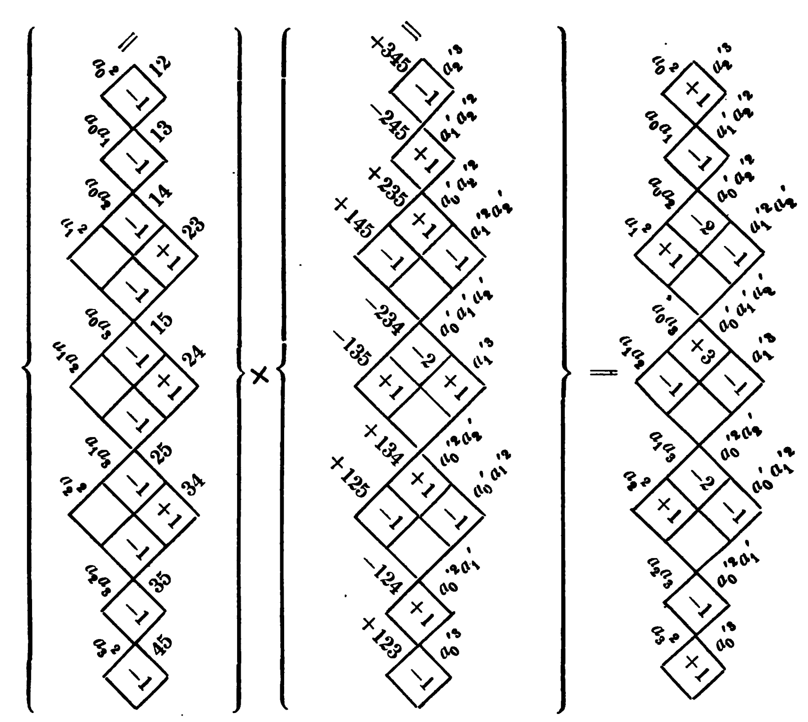
entspringenden mit den ähnlich gebildeten

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345

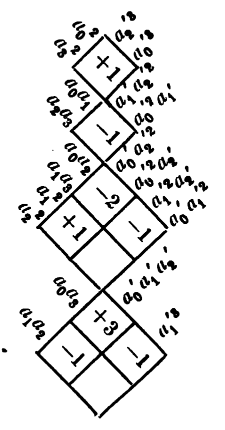
respective bezeichnet, so ist die obige Determinante entwickelt

$$= + 12.345 - 13.245 + 14.235 + 23.145 - 15.234 - 24.135 + 25.134$$
$$+ 34.125 - 35.124 + 45.123.$$

Die Entwickelung dieser Determinantenproducte ist sehr einfach und lässt sich unter Beibehaltung der Cayley'schen Darstellungsform, wie folgt, ausführen.

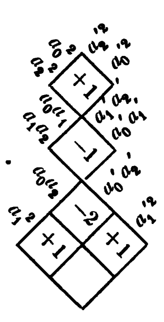


welches Resultat — wie es jetzt erscheint, characterisiert durch eine Vertheilung in Gruppen von gleichem Gewicht im Verhältniss zu den Coefficienten derselben Gleichung — durch Vereinigung der gleichweit über und unter der Mitte der Höhe stehenden Aggregate noch ferner verkürzt, wie folgt, geschrieben werden kann:



$$\text{d.i.} = (a_0^2 a_2'^3 + a_3^2 a_0'^3) - (a_0 a_1 a_1' a_2'^2 + a_2 a_3 a_0'^2 a_1') - 2(a_0 a_2 a_0' a_2'^2 + a_1 a_3 a_1'^2 a_2')$$
$$+ (a_1^2 a_0' a_2'^2 + a_2^2 a_1'^2 a_2') - (a_0 a_2 a_1'^2 a_2' + a_1 a_3 a_0' a_1'^2)$$
$$+ 3 a_0 a_3 a_0' a_1' a_2' - (a_0 a_3 a_1'^3 + a_1 a_2 a_0' a_1' a_2').$$

Die Resultante von zwei Gleichungen des zweiten Grades stellt sich in dieser Form dar wie folgt:



Diese Darstellungsweise ist nicht nur kürzer als andere, sondern sie bietet auch in leicht erkennbaren Gesetzen der Symmetrie nach Vorzeichen, numerischen Factoren und Coefficientenproducten mannichfache Mittel der Controle dar.*)

16.

An die Darlegung der hauptsächlichsten Methoden zur Bestimmung der Resultante schliesst sich naturgemäss die Frage nach der Bestimmung der gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen an**), deren Existenz durch die Gleichheit der Resultante derselben mit Null angezeigt wird. Diese Bestimmung wird erreicht mit Hilfe von zwei allgemeinen Eigenschaften der Resultante, welche mit früheren und späteren Entwickelungen dieser Arbeit im engsten Zusammenhange stehen.

Nach der Natur der Resultante als Product aller Differenzen zwischen den Wurzeln beider Gleichungen kann ihr Werth sich dadurch nicht ändern, dass die Werthe sämmtlicher Wurzeln um eine constante Grösse wachsen oder abnehmen. Man darf

$$\alpha_i = \alpha_{i_1} + h$$

---

*) Man findet a. a. O. die Entwickelung der Resultanten für alle Fälle bis zum 4ten Grade.

**) Vergl. G. Salmon, „Lessons introductory etc.,“ p. 27.

setzen, ohne die Resultante der allgemeinen Gleichungen

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots = 0,$$
$$a_0' x^n + a_1' x^{n-1} y + a_2' x^{n-2} y^2 + \ldots = 0,$$

welche von der allgemeinen Form

$$R = f(a_0, a_1, \ldots a_m; a_0', a_1', \ldots a_n')$$

ist, zu ändern. Gehen die gegebenen Gleichungen durch die angenommene Transformation in

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots = 0,$$
$$A_0' x^n + A_1' x^{n-1} y + A_2' x^{n-2} y^2 + \ldots = 0$$

über, so wird die Resultante dieser letzteren

$$R_1 = f(A_0, A_1, \ldots A_m; A_0', A_1', \ldots A_n')$$

und muss mit R identisch sein.

Nach dem Zusammenhange der Coefficienten der Gleichungen mit ihren Wurzeln hat man aber unter Voraussetzung der geforderten Transformation die Relationen

$$A_0 = a_0, \quad A_0' = a_0';$$
$$A_1 = a_1 + m a_0 h, \quad A_1' = a_1' + n a_0' h;$$
$$A_2 = a_2 + (m-1) a_1 h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_0 h^2,$$
$$A_2' = a_2' + (n-1) a_1' h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_0' h^2;$$
$$A_3 = a_3 + (m-2) a_2 h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_1 h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0 h^3,$$
$$A_3' = a_3' + (n-2) a_2' h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_1' h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0' h^3; \text{ etc.}$$
$$A_m = a_m + a_{m-1} h + a_{m-2} h^2 + a_{m-3} h^3 + \ldots + a_0 h^m,$$
$$A_n' = a_n' + a_{n-1}' h + a_{n-2}' h^2 + a_{n-3}' h^3 + \ldots + a_0' h^n.$$

Aus ihnen entspringen die anderen

$$A_0 - a_0 = \Delta a_0 = 0, \quad A_0' - a_0' = \Delta a_0' = 0;$$
$$A_1 - a_1 = \Delta a_1 = m a_0 h, \quad A_1' - a_1' = \Delta a_1' = n a_0' h;$$
$$A_2 - a_2 = \Delta a_2 = (m-1) a_1 h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_0 h^2,$$
$$A_2' - a_2' = \Delta a_2' = (n-1) a_1' h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_0' h^2; \text{ etc.}$$
$$A_m - a_m = \Delta a_m = a_{m-1} h + a_{m-2} h^2 + \ldots + a_0 h^m,$$
$$A_n' - a_n' = \Delta a_n' = a'_{n-1} h + a'_{n-2} h^2 + \ldots + a_0' h^n.$$

Man kann alsdann nach dem auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylor'schen Satze die neue Resultante

$$R_1 = f(A_0, A_1, \dots A_m; A_0', A_1', \dots A_n')$$
$$= f(a_0 + \varDelta a_0, a_1 + \varDelta a_1, \dots a_m + \varDelta a_m; a_0' + \varDelta a_0', a_1' + \varDelta a_1', \dots a_n' + \varDelta a_n')$$
entwickeln; sie ist nach Potenzen von h geordnet und für die allein in Betracht kommenden ersten beiden Glieder

$$R_1 = R + h\left(ma_0 \frac{dR}{da_1} + (m-1)\, a_1 \frac{dR}{da_2} + (m-2)\, a_2 \frac{dR}{da_3} + \dots + a_{m-1} \frac{dR}{da_m}\right.$$
$$\left. + na_0' \frac{dR}{da_1'} + (n-1)\, a_1' \frac{dR}{da_2'} + (n-2)\, a_2' \frac{dR}{da_3'} + \dots + a'_{n-1} \frac{dR}{da_n'}\right)$$
$$+ \dots,$$

und da R und R_1 für jedes beliebige Wachsthum h übereinstimmen müssen, so muss der Factor der ersten Potenz und es müssen nicht minder die Factoren aller folgenden Potenzen von h mit Null identisch sein.

Die Resultante der obigen Gleichungen genügt somit stets der Gleichung in partiellen Differentialen

$$ma_0 \frac{dR}{da_1} + (m-1)\, a_1 \frac{dR}{da_2} + (m-2)\, a_2 \frac{dR}{da_3} + \dots + a_{m-1} \frac{dR}{da_m}$$
$$+ na_0' \frac{dR}{da_1'} + (n-1)\, a_1' \frac{dR}{da_2'} + (n-2)\, a_2' \frac{dR}{da_3'} + \dots + a'_{n-1} \frac{dR}{da_n'} = 0.$$

Für zwei Gleichungen desselben Grades n nimmt dieselbe die specielle Form

$$n\left(a_0 \frac{dR}{da_1} + a_0' \frac{dR}{da_1'}\right) + (n-1)\left(a_1 \frac{dR}{da_2} + a_1' \frac{dR}{da_2'}\right) + \dots$$
$$+ \left(a_{n-1} \frac{dR}{da_n} + a'_{n-1} \frac{dR}{da_n'}\right) = 0$$

an.

Wenn es nach den allgemeinen Gesetzen über Grad und Gewicht der Resultante möglich ist, die litterale Form derselben unmittelbar anzugeben, so liefert das eben gefundene Gesetz der partiellen Differentiale eine zur Bestimmung der in dieselbe eingehenden numerischen Coefficienten hinreichende Anzahl von linearen Bedingungsgleichungen.

Für die früher geschriebene allgemeine Form der Resultante zweier Gleichungen zweiten Grades

$$A\,(a_0^2 a_2'^2 + a_0'^2 a_2^2) + B\,(a_0 a_1 a_1' a_2' + a_0' a_1' a_1 a_2) + C\,(a_0 a_1 a_1'^2 + a_0' a_1' a_1^2)$$
$$+ D\, a_0 a_2 a_0' a_2'$$

erhält man nach jenem Gesetz und nach einer einfachen Reduction die Bedingungsgleichung

$$2(A+B)(a_0^2 a_1' a_2' + a_0'^2 a_1 a_2) + (2B+4C+D)(a_0 a_1 a_0' a_2' + a_0' a_1' a_0 a_2)$$
$$+ (B+C)(a_0 a_1 a_1'^2 + a_0' a_1' a_1^2) = 0$$

und durch Vergleichung der numerischen Factoren der einzelnen Potenzen der Coefficienten mit Null die Gleichungen

$$A+B=0,\ 2B+4C+D=0,\ B+C=0,$$

aus welchen für die gestattete Annahme $A=1$ hervorgehen

$$B=-1,\ C=1,\ D=-2,$$

wie es die früher entwickelte Form dieser Resultante bestätigt.

Die Anwendung einer ganz ähnlichen Betrachtung auf die Coefficienten statt auf die Wurzeln der Gleichung führt zu einer anderen Eigenschaft der Resultante, aus welcher die Bestimmung der gemeinsamen Wurzeln unmittelbar hervorgeht.

Wenn die beiden Gleichungen, wie oben, durch

$$U=0,\quad V=0$$

respective vertreten werden, so ist für das Verschwinden ihrer Resultante

$$R=0$$

ein gemeinschaftlicher Wurzelwerth $\frac{x_1}{y_1}=\alpha$ vorhanden. Wenn alsdann in der Gleichung

$$U=0$$

die Coefficienten

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_m$$

in die anderen

$$a_0+\Delta a_0,\ a_1+\Delta a_1,\ a_2+\Delta a_2,\ \ldots\ a_m+\Delta a_m$$

übergehen, so dass diese Gleichung selbst die neue Form

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + \Delta a_0 x^m + \Delta a_1 x^{m-1} y + \ldots = 0$$

annimmt, so erkennt man, dass sie durch dieselben Werthe der Veränderlichen x_1, y_1 zur Identität wird, welche den ursprünglichen Gleichungen

$$U=0,\quad V=0$$

genügen, wenn nur von den Wachsthümern

$$\Delta a_0,\ \Delta a_1,\ \text{etc.}$$

die Bedingung

$$\Delta a_0 x_1^m + \Delta a_1 x_1^{m-1} y_1 + \ldots = 0$$

erfüllt wird. Die transformierte Gleichung hat alsdann mit den Originalgleichungen dieselbe gemeinschaftliche Wurzel und die Resultante, welche durch Elimination der Veränder-

lichen zwischen ihr und einer derselben erhalten wird, wird ebenfalls mit Null identisch; da man diese letzteren aber erhält, indem man in der Resultante der Originalgleichungen an Stelle der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ die veränderten Coefficienten

$$a_0 + \varDelta a_0,\ a_1 + \varDelta a_1 \text{ etc.}$$

setzt, so ist sie

$$R + \left(\varDelta a_0 \frac{dR}{da_0} + \varDelta a_1 \frac{dR}{da_1} + \varDelta a_2 \frac{dR}{da_2} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

und man erhält wegen $R = 0$ und nach der Freiheit, die Wachsthümer der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ beliebig klein zu denken, die Bedingung, welcher diese letzteren genügen müssen, in der zweiten Form

$$\varDelta a_0 \frac{dR}{da_0} + \varDelta a_1 \frac{dR}{da_1} + \varDelta a_2 \frac{dR}{da_2} + \ldots = 0.$$

Aus der Vergleichung derselben mit der oben erhaltenen ersten Form entspringt die fortlaufende Proportion

$$x_1^m : x_1^{m-1} y_1 : x_1^{m-2} y_1^2 : x_1^{m-3} y_1^3 \text{ etc.} \ldots : y_1^m$$
$$= \frac{dR}{da_0} : \frac{dR}{da_1} : \frac{dR}{da_2} \text{ etc.} \ldots : \frac{dR}{da_m};$$

aus welcher sich ergiebt

$$x_1 : y_1 = \frac{dR}{da_0} : \frac{dR}{da_1},$$

wie es zuerst Richelot gefunden hat.

Durch Anwendung derselben Untersuchung auf die zweite Gleichung findet man die analoge Gleichung

$$x_1 : y_1 = \frac{dR}{da_0'} : \frac{dR}{da_1'},$$

und somit auf dem einen wie auf dem anderen Wege die Bestimmung der gemeinschaftlichen Wurzel.

Aus den allgemeinen analogen Relationen

$$x_1^{m-k} y_1^k : x_1^{m-l} y_1^l = \frac{dR}{da_k} : \frac{dR}{da_l},$$

$$x_1^{n-k} y_1^k : x_1^{n-l} y_1^l = \frac{dR}{da_k'} : \frac{dR}{da_l'}$$

schliesst man die Proportion

$$\frac{dR}{da_k} : \frac{dR}{da_l} = \frac{dR}{da_k'} : \frac{dR}{da_l'}.$$

Man schliesst ferner für den Fall $m=n$ analog den vorhergehenden Gleichungen auf die Geltung der folgenden Proportion

$$x^{n-1} : x^{n-2}y : x^{n-3}y^2 : \text{etc.} \dots : x^2 y^{n-3} : x y^{n-2} : y^{n-1}$$
$$= \frac{dR}{d(i,0)} : \frac{dR}{d(i,1)} : \text{etc.} \dots : \frac{dR}{d(i,\overline{n-2})} : \frac{dR}{d(i,\overline{n-1})},$$

in welcher

$$\frac{dR}{d(i,j)}$$

die durch Unterdrückung der i^{ten} Reihe und j^{ten} Zeile aus der nach der Bezout-Cayley'schen Eliminationsmethode in Determinantenform dargestellten Resultante hervorgegangene Partialdeterminante ist. Denn wenn man von den Gleichungen, aus welchen nach jener Methode durch Elimination der

$$x^{n-1}y;\; x^{n-2}y^2, \text{ etc.}$$

die Resultante gebildet wird, die $(i+1)^{te}$ unterdrückt, so erhält man die Relation

$$\frac{dR}{d(i,\overline{n-1})} x^{n-i} = \frac{dR}{d(i,\overline{i-1})}$$

und daraus sofort die behauptete Proportion.

Wenn man in die Gleichungen selbst an Stelle der Potenzen der Veränderlichen die proportionalen partiellen Differentiale der Resultante nach den entsprechenden Coefficienten der jedesmaligen anderen Gleichung substituiert, so erhält man Identitäten von der Form

$$a_0' \frac{dR}{da_{m-n}} + a_1' \frac{dR}{da_{m-n+1}} + a_2' \frac{dR}{da_{m-n+2}} + \dots + a_n' \frac{dR}{da_m} = 0,$$

als fernere Eigenschaften der Resultante. Für $m=n$ geht z. B. daraus hervor das Paar der Gleichungen

$$a_0 \frac{dR}{da_0'} + a_1 \frac{dR}{da_1'} + \dots + a_n \frac{dR}{da_n'} = 0,$$
$$a_0' \frac{dR}{da_0} + a_1' \frac{dR}{da_1} + \dots + a_n' \frac{dR}{da_n} = 0.$$

Die zur Bestimmung der gemeinsamen Wurzel führende Proportionalität der partiellen Differentiale der Resultante mit den gemeinsamen Werthen der Veränderlichen lässt sich auch aus dem

Wesen der Resultante direct ableiten und führt dann zugleich zur Erweiterung der vorhergehenden Resultate auf den Fall von Systemen mehrerer gleicher Wurzeln.

Man hat für eine gemeinsame Wurzel, welche den Werthen der Veränderlichen x_1, y_1 entspricht, und für

$$x_2', y_2'; \; x_3', y_3'; \; x_4', y_4' \text{ etc.}$$

als die anderen Wurzeln der zweiten Gleichung unter Beibehaltung aller übrigen vorher eingeführten Bezeichnungen

$$R = (a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} y_1 + \ldots)(a_0 x_2'^m + a_1 x_2'^{m-1} y_2' + \ldots)$$
$$(a_0 x_3'^m + a_1 x_3'^{m-1} y_3' + \ldots) \ldots$$
$$= U_1 \,.\, U_2' \,.\, U_3' \ldots,$$

indem man die Substitutionsresultate aus dem Polynom U durch Anhängen der Indices der substituierten Werthe der Veränderlichen bezeichnet. Man erhält somit

$$\frac{dR}{da_0} = x_1^m \,.\, U_2' \,.\, U_3' \ldots + x_2'^m \,.\, U_1 \,.\, U_3' \ldots + x_3'^m \,.\, U_1 \,.\, U_2' \, U_4' \ldots + \ldots,$$

d. i. wegen

$$U = 0$$
$$\frac{dR}{da_0} = x_1^m \,.\, U_2' \,.\, U_3' \ldots$$

Ebenso findet man

$$\frac{dR}{da_1} = x_1^{m-1} y_1 \, U_2' \,.\, U_3' \ldots$$
etc.

und hat damit die gedachte Proportionalität wieder gewonnen.

Existieren aber zwei gemeinschaftliche Wurzeln, entsprechend den Werthen

$$x_1, y_1; \; x_2, y_2,$$

indess die übrigen Wurzeln der zweiten Gleichung wie vorher durch die Werthe

$$x_3', y_3'; \; x_4', y_4', \text{ etc.}$$

bezeichnet sind, so verschwinden zwar nach der oben angestellten Betrachtung sämmtliche, nach den Coefficienten der Gleichungen genommene erste Differentiale der Resultante, so dass die Proportionalität derselben zur Bestimmung der gemeinsamen Wurzelwerthe nicht führen kann; aber diese Bestimmung wird nun durch die Untersuchung

der zweiten Differentiale mit ganz ähnlichen einfachen Schlüssen erreicht.

Aus

$$R = U_1 . U_2 . U_3' . U_4' \ldots$$

folgt

$$\frac{d^2 R}{d a_0^2} = x_1^m x_2^m . U_3' . U_4' \ldots + x_1^m x_3'^m . U_2 . U_3' . U_4' \ldots$$
$$+ x_2^m x_3'^m . U_1 . U_3' . U_4' \ldots + \ldots$$

und wegen

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0$$

$$\frac{d^2 R}{d a_0^2} = x_1^m . x_2^m . U_3' . U_4' \ldots$$

In derselben Weise ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d^2 R}{d a_0 \, d a_1} = \{ x_1^m . x_2^{m-1} y_2 + x_2^m . x_1^{m-1} y_1 \} \, U_3' . U_4' \ldots,$$
$$\frac{d^2 R}{d a_1^2} = x_1^{m-1} y_1 . x_2^{m-1} y_2 . U_3' . U_4' \ldots,$$

und man schliesst daraus, dass die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d a_0^2} - \xi \eta \frac{d^2 R}{d a_0 \, d a_1} + \eta^2 \frac{d^2 R}{d a_1^2} = 0$$

in den Werthen von $\frac{\xi}{\eta}$ die Verhältnisse

$$x_1^m : x_1^{m-1} y_1 \text{ und } x_2^m : x_2^{m-1} y_2,$$

d. i.

$$x_1 : y_1 \text{ und } x_2 : y_2$$

bekannt giebt.

Es genügt für drei gemeinschaftliche Wurzeln die Bemerkung, dass alsdann die Betrachtung der dritten Differentiale zu einer Gleichung dritten Grades führt, aus welcher sich ihre Werthe ergeben. Dieselben Entwickelungen lassen sich fortsetzen und erledigen in einer für die weiteren Entwickelungen genügenden Weise das Problem der Bestimmung gemeinschaftlicher Wurzeln. Die symbolische Formel

$$\left(\xi \frac{dR}{d a_0} - \eta \frac{dR}{d a_1}\right)^t = 0,$$

in welcher die i^{te} Potenz des Differentials das i^{te} Differential bedeutet, enthält den bezüglichen allgemeinen Satz, welchen Brioschi wohl zuerst gegeben hat.*)

IV. Elemente der Theorie der Covarianten und Invarianten binärer Formen.

17.

Die lineare Transformation einer binären algebraischen Form

$$u = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \between x, y)^n$$
$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y + \ldots + a_n y^n$$

— und allgemeiner mit selbstverständlichen Erweiterungen die einer algebraischen Form überhaupt — bedeutet die Substitution der linearen Ausdrücke

$$\beta X + \gamma Y, \quad \beta' X + \gamma' Y$$

an Stelle der Veränderlichen x und y respective in diese und die damit verbundene Ueberführung derselben in die neue oder transformierte Form

$$U = (A_0, A_1, A_2, \ldots A_n \between X, Y)^n.$$

Die Coefficienten derselben $A_0, A_1, \ldots$ sind in jedem speciellen Falle wie im Allgemeinen einfach ausdrückbar durch die Coefficienten der ursprünglichen Form und diejenigen der Substitution.

Für den Fall einer quadratischen Form

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$$

findet man

$$A_0 = a_0 \beta^2 + a_1 \beta \beta' + a_2 \beta'^2, \quad A_2 = a_0 \gamma^2 + a_1 \gamma \gamma' + a_2 \gamma'^2,$$
$$A_1 = 2 a_0 \beta \gamma + a_1 (\beta \gamma' + \beta' \gamma) + 2 a_2 \beta' \gamma',$$

oder in schicklicherer Form

$$A_0 = (a_0, a_1, a_2 \between \beta, \beta')^2, \quad A_2 = (a_0, a_1, a_2 \between \gamma, \gamma')^2$$
$$A_1 = \beta \frac{dA_2}{d\gamma} + \beta' \frac{dA_2}{d\gamma'} = \gamma \frac{dA_0}{d\beta} + \gamma' \frac{dA_0}{d\beta'}.$$

Man findet in analoger Art für die Transformation von

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3$$

---

*) Brioschi, „Théorie des Déterminants“ (Trad. p. Combescure) p. 175, wo auch die Bestimmung einer vielfachen Wurzel einer Gleichung an dieselbe Betrachtung geknüpft ist.

in

$$(A_0, A_1, A_2, A_3 \between X, Y)^3$$

die Relationen

$$A_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3 \between \beta, \beta')^3, \quad A_3 = (a_0, a_1, a_2, a_3 \between \gamma, \gamma')^3,$$

$$A_1 = \gamma \frac{dA_0}{d\beta} + \gamma' \frac{dA_0}{d\beta'} \quad , \quad A_2 = \beta \frac{dA_3}{d\gamma} + \beta' \frac{dA_3}{d\gamma'},$$

und für die von

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x, y)^4$$

in

$$(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \between X, Y)^4$$

ebenso

$$A_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between \beta, \beta')^4, \quad A_4 = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between \gamma, \gamma')^4,$$

$$A_1 = \gamma \frac{dA_0}{d\beta} + \gamma' \frac{dA_0}{d\beta'} \quad , \quad A_3 = \beta \frac{dA_4}{d\gamma} + \beta' \frac{dA_4}{d\gamma'},$$

$$A_2 = \frac{\gamma^2}{2} \frac{d^2 A_0}{d\beta^2} + \gamma\gamma' \frac{d^2 A_0}{d\beta\, d\beta'} + \frac{\gamma'^2}{2} \frac{d^2 A_0}{d\beta'^2}$$

$$= \frac{\beta^2}{2} \frac{d^2 A_4}{d\gamma^2} + \beta\beta' \frac{d^2 A_4}{d\gamma\, d\gamma'} + \frac{\beta'^2}{2} \frac{d^2 A_4}{d\gamma'^2}, \text{ etc.}$$

Man nennt die Determinante der Substitutionsgleichungen

$$x = \beta X + \gamma Y,$$
$$y = \beta' X + \gamma' Y,$$

d. h. den gemeinschaftlichen Nenner der durch lineare Elimination aus ihnen bestimmten Werthe der neuen Veränderlichen durch die alten

$$\begin{vmatrix} \beta, & \gamma \\ \beta', & \gamma' \end{vmatrix} \text{ oder } (\beta\gamma' - \beta'\gamma)$$

den Modulus der Transformation und nennt diese letztere selbst unimodular, wenn die bezeichnete Grösse, wie es bei den analytisch-geometrischen Betrachtungen zumeist erlaubt ist vorauszusetzen, den Werth der positiven Einheit hat.

Es ist das Princip der neueren analytisch-geometrischen Formenlehre, die algebraischen Functionen mit Hilfe solcher aus ihnen ableitbaren Functionen zu studieren, deren Beziehung zu ihnen durch lineare Transformationen nicht gestört wird. Nachdem durch die vorhergehenden Untersuchungen über die symmetrischen Functionen, die Functionen von Sturm und über die Bildung und Eigenschaften der Resultanten von verschiedenen Seiten ein tieferer Ein-

blick in die Natur der binären Formen eröffnet worden ist, erscheint es als nächste Aufgabe, jenes Princip in seiner Anwendung auf dieselben näher ins Auge zu fassen, die einschlagenden Begriffe festzustellen und unter den bisher betrachteten abgeleiteten Formen Umschau nach dem bezeichneten Character der Invariabilität zu halten.

Jede Function der Coefficienten einer algebraischen Form / Gleichung oder eines Systems von Formen / Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzt, dass bei einer Transformation derselben durch lineare Substitutionen für die Veränderlichen die gleichgebildete Function der neuen Coëfficienten aus der gegebenen durch Multiplication mit einer Potenz der Substitutions-Determinante hervorgeht, heisst eine *Invariante* der Form / Gleichung oder des Systems der Formen. / Gleichungen. Eine solche bleibt vollkommen ungeändert dann, wenn die Transformation positiv unimodular ist.

In diesem Sinne wurden jene Functionen der Coefficienten quadratischer Formen, welche als Discriminante einer solchen und lineare Invariante von zweien derselben früher (Art. 2) bezeichnet wurden, als Invarianten erwiesen.

Anderseits heisst jede aus einer gegebenen Form oder Gleichung abgeleitete Function ihrer Veränderlichen und Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass die durch eine lineare Substitution für die in ihr auftretenden Veränderlichen aus ihr abgeleitete Function nach demselben Gesetze aus der durch dieselbe Substitution transformierten Form hervorgeht, nach welchem sie selbst aus der ursprünglichen gebildet ist, eine *Covariante* der ursprünglichen Form. Wenn die betrachtete Function als eine gemeinsame Abgeleitete aus mehreren gegebenen Formen erscheint, so hat man den Begriff einer Covariante für ein System von Formen.

Ist f die ursprüngliche und F die durch eine lineare Substitution vom Modulus M transformierte Form, $\varphi(x,y)$ die abgeleitete Function der ursprünglichen, $\Phi(X,Y)$ die in gleicher Weise abgeleitete Function der transformierten Form, so ist dieselbe eine Covariante, wenn die Relation

$$\varphi(x,y) \,.\, M^p = \Phi(X, Y)$$

erfüllt ist. Wird die Function φ in Bezug auf die Veränderlichen vom Grade Null gedacht, so giebt dieselbe Relation die algebraische Definition der Invarianten.

Es ergiebt sich unmittelbar aus den gegebenen Definitionen, dass jede Invariante einer Covariante eine Invariante der Originalform ist.

Unter den in der bisherigen Untersuchung hervorgetretenen Functionen, welche den Character der Invarianten besitzen, kann die Determinante eines Systems linearer homogener Gleichungen als ein nächster Ausgangspunkt für darauf bezügliche Untersuchungen angesehen werden; ihren Invarianten-Character drückt das Multiplicationstheorem der Determinanten aus, wenn es in der Form gegeben wird: Wenn ein System von n linearen homogenen Gleichungen mit n Veränderlichen durch lineare Substitutionen transformiert wird, so ist die Determinante des transformierten Systems das Product aus der Determinante des Originalsystems in die Determinante der Substitution.

Es liegt nahe, von ihr auf die Resultante eines beliebigen anderen Systems zu schliessen, und in der That ist leicht nachzuweisen, dass die Resultante jedes Systems binärer Formen eine Invariante derselben ist. Es ergiebt sich diess zunächst schon aus der Bedeutung, die die Resultante besitzt, als nach welcher ihre Identität mit Null das Vorhandensein einer gemeinschaftlichen Wurzel bezeichnet; denn da durch eine lineare Substitution eine solche gemeinschaftliche Wurzel nicht verschwinden kann, so muss die Resultante des transformierten Systems stets zugleich mit der des Originalsystems verschwinden, d. i. sie muss diese letztere als einen Factor enthalten.

Das Nämliche ergiebt sich aber auch aus der Art der Zusammensetzung der Resultante aus den linearen Factoren der gegebenen Gleichungen.

Ist

$$u = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_i y) \ldots (x - \alpha_m y) = 0,$$
$$v = a_0'(x - \alpha_1' y)(x - \alpha_2' y) \ldots (x - \alpha_i' y) \ldots (x - \alpha_n' y) = 0,$$

so wird durch die linearen Substitutionen

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

$$x - \alpha_i y = (\beta - \alpha_i \beta')\left(X - \frac{\alpha_i \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_i \beta'} Y\right),$$

$$x - \alpha_i' y = (\beta - \alpha_i' \beta')\left(X - \frac{\alpha_i' \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_i' \beta'} Y\right);$$

die transformierten Formen werden daher

$$U = a_0 (\beta - \alpha_1 \beta')(\beta - \alpha_2 \beta') \dots (\beta - \alpha_m \beta')\left(X - \frac{\alpha_1 \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_1 \beta'} Y\right)$$
$$\left(X - \frac{\alpha_2 \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_2 \beta'} Y\right) \dots \left(X - \frac{\alpha_m \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_m \beta'} Y\right),$$

$$V = a_0' (\beta - \alpha_1' \beta')(\beta - \alpha_2' \beta') \dots (\beta - \alpha_n' \beta')\left(X - \frac{\alpha_1' \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_1' \beta'} Y\right)$$
$$\left(X - \frac{\alpha_2' \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_2' \beta'} Y\right) \dots \left(X - \frac{\alpha_n' \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_n' \beta'} Y\right),$$

und die Differenz $(\alpha_i - \alpha_j')$ zweier Wurzeln der beiden transformierten Gleichungen, als einer der mn Factoren der Resultante wird also

$$\alpha_i - \alpha_j' = \frac{\alpha_i \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_i \beta'} - \frac{\alpha_j' \gamma' - \gamma}{\beta - \alpha_j' \beta'}$$
$$= \frac{(\beta - \alpha_j' \beta')(\alpha_i \gamma' - \gamma) - (\beta - \alpha_i \beta')(\alpha_j' \gamma' - \gamma)}{(\beta - \alpha_i \beta')(\beta - \alpha_j' \beta')}$$
$$= \frac{(\beta \gamma' - \beta' \gamma)(\alpha_i - \alpha_j')}{(\beta - \alpha_i \beta')(\beta - \alpha_j' \beta')}.$$

Da nun die Resultante der beiden Formen m^{ten} und n^{ten} Grades durch das Product ihrer mn Wurzeldifferenzen mit der n^{ten} und m^{ten} Potenz ihrer leitenden Coefficienten ausgedrückt wird,*) so verschwinden für die transformierten Formen diese letzteren Factoren gegen das Product der Nenner sämmtlicher Wurzeldifferenzen und man erhält zwischen der Resultante R der transformierten und der Resultante R der Originalform die Relation

$$\mathrm{R} = (\beta \gamma' - \beta' \gamma)^{mn} . R,$$

welche den Invarianten-Character ausspricht.

Man kann eine wichtige Erweiterung dieses Ergebnisses sehr einfach constatieren, wenn man von der Cayley'schen Form des Bezout'schen Eliminationsverfahrens ausgeht. Dieselbe lautet: Wenn die Formen U, V mit den ge-

---

*) Vergl. Art. 13, p. 103.

gebenen Formen u, v linear verbunden sind, so dass Relationen von der Form

$$U = \beta u + \gamma v, \quad V = \beta' u + \gamma' v$$

zwischen beiden Gruppen bestehen, so ist die Resultante R der Formen U und V von derjenigen R der Formen u, v nur durch einen Factor verschieden, der einer Potenz der Substitutionsdeterminante

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)$$

gleich ist.

Wenn diess einerseits schon aus der Bedeutung der Resultante hervorgeht, so kann der Beweis besonders einfach auch an die Bildung des Cayley'schen Ausdrucks

$$\frac{u v_1 - u_1 v}{x y_1 - x_1 y}$$

geknüpft werden, in welchem u_1, v_1 die Werthe von u, v bezeichnen, die durch Substitution der Werthe x_1, y_1 an Stelle der Veränderlichen erhalten werden; der aus den neuen Functionen U, V in gleicher Weise gebildete Ausdruck unterscheidet sich von ihm nur durch den Factor $(\beta\gamma' - \beta'\gamma)$, denn man hat

$$\frac{UV_1 - U_1 V}{x y_1 - x_1 y} = \frac{(\beta u + \gamma v)(\beta' u_1 + \gamma' v_1) - (\beta u_1 + \gamma v_1)(\beta' u + \gamma' v)}{x y_1 - x_1 y}$$

$$= (\beta\gamma' - \beta'\gamma) \cdot \frac{u v_1 - u_1 v}{x y_1 - x_1 y},$$

und erkennt aus der Bildung der Resultante in Determinantenform durch die Entwickelung dieses Ausdrucks, wie sie im Artikel 14, p. 114 angegeben ist, dass die Resultante der neuen Formen U, V sich von der der ursprünglichen nur durch eine Potenz der Substitutionsdeterminante unterscheidet, deren Exponent mit der Zahl der Reihen jener Determinante identisch ist; für zwei Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades und $m > n$ also um den Factor

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^m.$$

Dieses Ergebniss erlaubt unter anderen eine einfache Anwendung auf die partiellen Differentiale einer beliebigen binären Form nach den Veränderlichen derselben. Für die Form

$$u = 0, \text{ d. i. } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n = 0$$

sei die aus ihren partiellen Differentialen

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$$

gebildete Resultante

$$R = 0.$$

Durch die Substitution

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

verwandelt sich die Form in

$$U = 0,$$

ihre partiellen Differentiale werden

$$\frac{dU}{dX}, \frac{dU}{dY}$$

und die Resultante derselben sei

$$\mathrm{R} = 0.$$

Die Relationen

$$\frac{dU}{dX} = \beta \frac{du}{dx} + \beta' \frac{du}{dy}, \quad \frac{dU}{dY} = \gamma \frac{du}{dx} + \gamma' \frac{du}{dy}$$

zeigen die lineare Verbindung der transformierten Differentiale mit den ursprünglichen, und mit Rücksicht darauf, dass dieselben vom Grade $(n-1)$ in den Veränderlichen sind, hat man

$$\mathrm{R} = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n-1} \,.\, R.$$

Für jede binäre Form ist die Resultante ihrer beiden mit Null verglichenen partiellen Differentiale eine Invariante.

Diess wird durch die Darstellung dieser Function mittelst Gliedern der Wurzeln der ursprünglichen Form ferner erläutert und als mit dem Früheren in vielseitiger Verbindung erkannt. Man hat in den früheren Bezeichnungen

$$u = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y),$$

oder wenn man α_i der Homogenität wegen durch

$$\frac{x_i}{y_i}$$

ersetzt, bei

$$a_0 = y_1 y_2 \ldots y_n$$
$$u = (x y_1 - x_1 y)(x y_2 - x_2 y) \ldots (x y_n - x_n y)$$

und somit

$$\frac{du}{dx} = y_1 (x y_2 - x_2 y)(x y_3 - x_3 y) \ldots + y_2 (x y_1 - x_1 y)(x y_3 - x_3 y) \ldots + \ldots$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution der verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$u = 0$$

auf je eines seiner Glieder, nämlich immer auf dasjenige reduciert, in dessen binomischen Factoren die betreffende Wurzel

selbst nicht enthalten ist, also für die Substitution von x_1, y_1; x_2, y_2; etc. respective auf

$$y_1\,(x_1y_2-x_2y_1)\,(x_1y_3-x_3y_1)\ldots,$$
$$y_2\,(x_2y_1-x_1y_2)\,(x_2y_3-x_3y_1)\ldots,$$
etc.

Das Product dieser sämmtlichen Substitutionsresultate liefert die Resultante der Gleichungen

$$u=0,\ \frac{du}{dx}=0$$

in der Form

$$y_1y_2y_3\ldots(x_1y_2-x_2y_1)^2(x_1y_3-x_3y_1)^2(x_2y_3-x_3y_2)^2\ldots,$$

welche zu der hier zu betrachtenden Resultante von

$$\frac{du}{dx}=0,\ \frac{du}{dy}=0$$

in einer sehr einfachen Beziehung steht. Denn diese Letztere ist das Product der Substitutionsresultate, welche durch Einführung der Wurzeln von

$$\frac{du}{dx}=0 \text{ in } \frac{du}{dy}=0$$

erhalten werden; nach der auf Grund der Homogenität der Function $u=0$ stattfindenden Relation

$$nu=x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}$$

liefert aber die Substitution irgend einer Wurzel von $\frac{du}{dx}$, welche wieder durch die Werthe x_1, y_1 bezeichnet sein mag, in den Ausdruck für $n\,u$ nothwendig das Resultat

$$y_1\left(\frac{du}{dy}\right)_1,$$

und das Product sämmtlicher Substitutionsresultate oder die Resultante von

$$u=0,\ \frac{du}{dx}=0$$

ist somit

$$=y_1y_2y_3\ldots\left(\frac{du}{dy}\right)_1\left(\frac{du}{dy}\right)_2\left(\frac{du}{dy}\right)_3\ldots$$
$$=a_0\left(\frac{du}{dy}\right)_1\left(\frac{du}{dy}\right)_2\left(\frac{du}{dy}\right)_3\ldots,$$

d. i. gleich dem $a_0$fachen Product aller durch Substitution der Wurzeln von

$$\frac{du}{dx}=0 \text{ in } \frac{du}{dy}=0$$

erhaltenen Resultate, oder gleich der $a_0$fachen Resultante der Gleichungen

$$\frac{du}{dx}=0, \frac{du}{dy}=0.$$

Man findet also diese Letztere aus der Ersteren, wenn mit jene mit

$$a_0 \text{ oder } y_1 y_2 y_3 \dots$$

dividiert, d. h. man erkennt sie als ausgedrückt durch

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 \dots$$

Die Resultante der mit Null verglichenen partiellen Differentiale einer binären Form, welche als eine Invariante vorher erwiesen ist, wird somit als das Product der Quadrate aller Differenzen der Wurzeln dieser Form erkannt.

Sie wird als Discriminante der Gleichung und Form bezeichnet, aus welcher sie abgeleitet ist (Art. 10, p. 78). Ihre Gleichheit mit Null ist die Bedingung, unter welcher die vorgelegte Gleichung ein Paar übereinstimmende Wurzeln hat; wird diese Letztere als Ausdruck eines geometrischen Elementargebildes betrachtet, so bezeichnet das Verschwinden der Discriminante die Existenz eines doppelten Elements in demselben; in diesem Sinne ist sie in den Entwickelungen des ersten Abschnitts (Art. 2) entscheidend hervorgetreten. Er wird ferner erläutert durch die Erkenntniss ihrer Bedeutung in dem Zusammenhang des Sturm'schen Theorems. (Art. 11.) Als die symmetrische Function der sämmtlichen Quadrate der Wurzeldifferenzen steht sie in einer leicht erkennbaren Beziehung zur Resultante zweier Formen, welche so ausgedrückt werden kann: Das Product der Discriminanten zweier Formen ist der Quotient aus der Discriminante des Products dieser Formen durch das Quadrat der Resultante derselben. Die Discriminante des Products ist das Product der Quadrate der Differenzen aller Wurzeln beider Formen und unterscheidet sich somit von dem Product ihrer Discirminanten, als in welches nur die Producte der Quadrate der Differenzen der Wurzeln einer jeden Gleichung für sich eingehen, durch das Product der Quadrate aller Differenzen der Wurzeln der einen Form mit denen der andern, d. h. durch das Quadrat der Resultante beider Formen.

Es ist hiernach offenbar, dass die Discriminante jeder binären Form nach den verschiedenen Methoden der Elimination, also insbesondere auch als eine symmetrische Determinante nach der Bezout-Cayley'schen Methode, aus ihren partiellen

Differentialen entwickelt werden kann. So ist die der Gleichung dritten Grades

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3 = 0$$

die Resultante der Gleichungen

$$3 a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2 = 0,$$
$$a_1 x^2 + 2 a_2 x y + 3 a_3 y^2 = 0,$$

und kann somit aus dem bekannten Ausdruck derselben durch eine einfache Coefficientenveränderung abgeleitet werden,*) etc.

Die Resultante zweier Gleichungen ist, wie die Discriminante einer Gleichung, eine symmetrische Function der Wurzeln und specieller eine Function der Wurzeldifferenzen. Die Ausdrückbarkeit derselben als Product einer Anzahl von Factoren von der Form

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ist im Vorigen als Kriterium ihrer Invarianz erschienen. Man erkennt leicht, dass jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung, die zugleich eine Function der Wurzeldifferenzen ist, zu den Invarianten gehört, wenn in jedes ihrer Glieder alle Wurzeln der Gleichung in dem nämlichen Grade eingehen.**)

Die Function

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

ist für die Form des zweiten Grades eine Invariante (die Discriminante), aber nicht für die des vierten Grades, denn für diese ist

$$\Sigma \left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}\right)^2 = \Sigma y_3^2 y_4^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Für die Formen des vierten Grades ist dagegen

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2$$

eine Invariante, weil sie durch Substitution und Beseitigung der Nenner in

*) Die Discriminante der cubischen Form findet sich schon bei Eisenstein, in „Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden", Crelle's „Journal für die reine u. angew. Mathematik", Bd. 27, p. 105. Wir verweisen darauf, weil auch manches Andere dort eng mit der Theorie der Invarianten zusammenhängt. Diess erhellt besonders aus der Vergleichung mit Sylvester's wichtigen Arbeiten im „Cambridge & Dublin Math. Journ." Februar und November 1852 „On the Principles of the Calculus of Forms".

**) Vergl. Salmon, „Lessons introductory" etc. p. 53.

$$\Sigma\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2\,(x_3 y_4 - x_4 y_3)^2$$

übergeht, und dieselbe Function ist für Formen des sechsten Grades keine Invariante, weil sie dann auf demselben Wege die Gestalt

$$\Sigma\, y_5^2 y_6^2\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2\,(x_3 y_4 - x_4 y_3)^2$$

annimmt.

Das Erste gilt für Formen des dritten Grades von der Function

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2\,(\alpha_2 - \alpha_3)^2\,(\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

ihrer Discriminante nach dem Vorigen.

Für die Formen des vierten Grades ist die symmetrische Function

$$\Sigma\,(\alpha_1 - \alpha_2)^2\,(\alpha_3 - \alpha_4)^2\,(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_2 - \alpha_4)$$

eine Invariante, weil sie ebenfalls den gestellten Bedingungen entspricht; sie enthält in jedem ihrer Glieder jede Wurzel dreifach. Sie kann in der Form

$$\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)-(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)\}\,\{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)\}$$
$$\{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\}$$

geschrieben werden, in welcher ihr Zusammenhang mit der Invariante der harmonischen Relation im Art. 2 sich unverkennbar ausspricht.

Allgemein ist

$$\Sigma\,(\alpha_1 - \alpha_2)^a\,(\alpha_2 - \alpha_3)^b\,(\alpha_3 - \alpha_4)^c$$

der Ausdruck einer Invariante, wenn dem ausgesprochenen Gesetze genügt ist.

I n d e r T h a t k a n n m a n a u f d i e s e m W e g e a l l e I n v a r i a n t e n b i n ä r e r F o r m e n e n t w i c k e l n, da es ersichtlich ist, wie zur Uebertragung solcher symmetrischer Functionen der Wurzeln in Functionen der Coefficienten die Entwickelungen und Tafeln über die symmetrischen Functionen die bequemste Möglichkeit darbieten. N i c h t m i n d e r k ö n n e n C o v a r i a n t e n a l s s y m m e t r i s c h e F u n c t i o n e n d e r W u r z e l n g e b i l d e t w e r d e n und es ist auch dabei allein wesentlich, dass jede der Wurzeln in gleichem Grade der Vielfachheit in die symmetrische Function eingehe.

Für cubische Formen ist z. B.

$$\Sigma\,(x - \alpha_1 y)^2\,(\alpha_2 - \alpha_3)^2$$

eine Covariante, welche in der weiteren Darlegung dieser Untersuchungen eine hohe Wichtigkeit erlangen wird. Ebenso

$$\{(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_3 y)-(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1 y)\}\,\{(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1 y)-(\alpha_3-\alpha_1)(x-\alpha_2 y)\}$$
$$\{(\alpha_3-\alpha_1)(x-\alpha_2 y)-(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_3 y)\}$$

oder

$$\Sigma\,(x-\alpha_2 y)^2\,(x-\alpha_3 y)\,(\alpha_1-\alpha_3)^2\,(\alpha_1-\alpha_2).$$

Für die Formen des vierten Grades ist

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^2\,(x-\alpha_3 y)^2\,(x-\alpha_4 y)^2$$

eine covariante symmetrische Function, etc.

Allgemein wird

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^{\lambda}\,(\alpha_2-\alpha_3)^{\mu}\,(\alpha_3-\alpha_4)^{\nu}\,(x-\alpha_1 y)^{n-a}\,(x-\alpha_2 y)^{n-b}\,\ldots$$

Ausdruck einer Covariante, wenn jede Wurzel der gegebenen Form in dem nämlichen Grade in denselben eingeht.

Andere Methoden, namentlich aber allgemeine wichtige Eigenschaften der Invarianten und Covarianten, deren Kenntniss für weitere Untersuchungen unentbehrlich ist, führen schneller und unabhängiger zum Ziel ihrer Entwickelung in Function der Coefficienten der vorgelegten Formen. Jedoch ist die vorbezeichnete Darstellungsweise der Invarianten und Covarianten binärer Formen als symmetrische Functionen und Functionen der Wurzeldifferenzen von entscheidender Wichtigkeit für das Verständniss der geometrischen Bedeutung dieser Formen.

Hier mag noch an die Sylvester'schen Formen der Sturm'schen Functionen erinnert werden; das Vorige wird zur Erkenntniss genügen, dass die darauf bezüglichen Theorien in der hier gewählten Darlegung aufs Engste mit der Theorie der Invarianten und Covarianten verbunden sind, und dass ihre Wichtigkeit in eben diesen Zusammenhängen begründet ist.

18.

Man kann zunächst zur Ableitung von Invarianten und Covarianten der binären Formen von der näheren Betrachtung der Art gelangen, in welcher die partiellen Differentialquotienten derselben durch die lineare Substitution transformiert werden.

Von der homogenen binären Form n^{ten} Grades

$$u=0$$

gelange man durch die Substitution

$$x=\beta X+\gamma Y,\quad y=\beta' X+\gamma' Y$$

zur transformierten Form

$$U = 0.$$

Das Symbol

$$(\beta, \gamma')$$

bezeichne nach einer schon mehrfach benutzten Abkürzung die Substitutionsdeterminante.

Man hat

$$(\beta, \gamma') X = \gamma' x - \gamma y, \quad (\beta, \gamma') Y = -\beta' x + \beta y,$$

also

$$(\beta, \gamma') \frac{dX}{dx} = \gamma' \quad , \qquad (\beta, \gamma') \frac{dY}{dy} = \beta \quad ,$$

$$(\beta, \gamma') \frac{dX}{dy} = -\gamma, \qquad (\beta, \gamma') \frac{dY}{dx} = -\beta'.$$

Nun ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{dU}{dY} \cdot \frac{dY}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dX} \cdot \frac{dX}{dy} + \frac{dU}{dY} \cdot \frac{dY}{dy};$$

also mit Beachtung des Vorigen

$$(\beta, \gamma') \frac{du}{dx} = \frac{dU}{dX} \cdot \gamma' - \frac{dU}{dY} \cdot \beta',$$

$$(\beta, \gamma') \frac{du}{dy} = -\frac{dU}{dX} \gamma + \frac{dU}{dY} \beta.$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{(\beta, \gamma')} \left\{ \beta' . - \frac{dU}{dY} + \gamma' \frac{dU}{dX} \right\},$$

$$- \frac{du}{dy} = \frac{1}{(\beta, \gamma')} \left\{ \beta . - \frac{dU}{dY} + \gamma \frac{dU}{dX} \right\},$$

so lehren sie durch Vergleichung mit den Substitutionsrelationen

$$y = \beta' X + \gamma' Y,$$

$$x = \beta X + \gamma Y,$$

dass, abgesehen von dem Factor

$$\frac{1}{(\beta, \gamma')}$$

die Differentialquotienten

$$\frac{du}{dx} \text{ und } - \frac{du}{dy}$$

durch die Substitution in derselben Weise transformiert werden, wie die Veränderlichen

$$y \text{ und } x;$$

denn man erhält aus den letzten Formeln die Substitutionsgleichungen, indem man

$$\frac{du}{dx} \text{ und } \frac{dU}{dY}$$

durch

$$y \text{ und } Y,$$

$$-\frac{du}{dy} \text{ und } -\frac{dU}{dY}$$

durch

$$x \text{ und } X$$

ersetzt.

Man schliesst daraus den Satz: Wenn die ursprüngliche Form

$$u = f(x, y)$$

durch eine lineare Substitution von der Determinante (β, γ') in die transformierte

$$U = f(X, Y)$$

übergeht, so ist

$$(\beta, \gamma')^n f\left(\frac{du}{dy}, -\frac{du}{dx}\right) = f\left(\frac{dU}{dY}, -\frac{dU}{dX}\right);$$

so dass die Function

$$f\left(\frac{dU}{dY}, -\frac{dU}{dX}\right)$$

eine Invariante oder Covariante der Form $f(x,y)$ ist.

Auf die quadratische Form

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$$

angewendet, hat man

$$a_0 \frac{d^2}{dy^2} - a_1 \frac{d^2}{dydx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2},$$

als ein Operations-Symbol, dessen Differentiale sich eben auf die gegebene Form beziehen.

Man erhält durch Entwickelung den Ausdruck

$$4 a_0 a_2 - a_1^2,$$

dessen invarianter Character aus dem Früheren (Art. 2) schon bekannt ist.

Man erhält ebenso für die Form des vierten Grades

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

das Symbol

$$a_0 \frac{d^4}{dy^4} - a_1 \frac{d^4}{dy^3\,dx} + a_2 \frac{d^4}{dy^2\,dx^2} - a_3 \frac{d^4}{dy\,dx^3} + a_4 \frac{d^4}{dx^4}$$

und durch Entwickelung

$$12 a_0 a_4 - 3 a_1 a_3 + a_2^2,$$

welche Function zu der entsprechenden transformierten in der Relation steht

$$(12 a_0 a_4 - 3 a_1 a_3 + a_2^2) = \frac{1}{(\beta, \gamma')} 4 (12 A_0 A_4 - 3 A_1 A_3 + A_2^2);$$

und für die des sechsten Grades

$$a_0 x^6 + a_1 x^5 y + a_2 x^4 y^2 + a_3 x^3 y^3 + a_4 x^2 y^4 + a_5 x y^5 + a_6 y^6$$

das Symbol

$$a_0 \frac{d^6}{dy^6} - a_1 \frac{d^6}{dy^5\,dx} + a_2 \frac{d^6}{dy^4 dx^2} - a_3 \frac{d^6}{dy^3 dx^3} + a_4 \frac{d^6}{dy^2 dx^4} - a_5 \frac{d^6}{dy dx^5} + a_6 \frac{d^6}{dx^6}$$

und die Entwickelung

$$120 a_0 a_6 - 20 a_1 a_5 + 8 a_2 a_4 - 3 a_3^2.$$

Alle so erhaltenen Invarianten sind vom zweiten Grade in den Coefficienten der Form. Ihre Bedeutsamkeit wird weiterhin an einem Beispiele aus der Theorie der algebraischen Gleichungen eingehend gezeigt werden; es ist aber zuvor zu bemerken, wie die entwickelten Operationssymbole durch ihren ganzen Bau gewissermaassen die numerischen Binomialcoefficienten fordern und sie erhalten, wenn man dieselben in der ursprünglichen Form gleichfalls voraussetzt, d. h. die allgemeine Form nicht als

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots\; a_n)(x, y)^n,$$

wie bisher, sondern als

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots\; a_n)(x, y)^n$$

bestimmt. Man erhält dann für

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2,$$

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3,$$

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

die mit denselben numerischen Coefficienten versehenen Operationssymbole

$$a_0 \frac{d^2}{dy^2} - 2 a_1 \frac{d^2}{dy\,dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2},$$

etc.,

und die Resultate

$$a_0 a_2 - a_1^2,$$
$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2,$$

in welchen sich das einfache Gesetz der numerischen Factoren nicht verkennen lässt, nach welchem ihre algebraische Summe für jede dieser Invarianten Null beträgt. Ein solches Gesetz ist ein zu bequemes Verificationsmittel, als dass man sich dasselbe ohne Noth entgehen lassen dürfte; im Folgenden werden daher die binären Formen als mit Binomialcoefficienten behaftet vorausgesetzt. Man geht von der bisherigen Bezeichnung zu der so erhaltenen über, indem man jeden der Coefficienten mit der zugehörigen Binomialzahl dividiert.

Die Bildung dieser Functionen zeigt sogleich, dass sie für Formen von ungeradem Grade identisch mit Null werden, so dass für dieselben keine Invarianten dem gegebenen Bildungsgesetze entspringen.

Aber es kann dasselbe auf die Verbindung zweier Formen übertragen und die gefundenen Operationssymbole können auf Formen anderer Grade angewendet werden, als diejenigen, aus welchen sie selbst abgeleitet sind.

Man erhält so für die beiden quadratischen Formen

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \quad a_0' x^2 + 2 a_1' x y + a_2' y^2$$

durch das der ersten entspringende Symbol

$$a_0 \frac{d^2}{dy^2} - 2 a_1 \frac{d^2}{dy\, dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2},$$

wenn man die darin erscheinenden Differentiale auf die zweite Form bezieht, als Resultat die bekannte Invariante

$$a_0 a_2' + a_0' a_2 - 2 a_1 a_1',$$

welche in der Form ohne Binomialcoefficienten

$$2 a_0 a_2' + 2 a_0' a_2 - a_1 a_1'$$

als die symmetrische Function der Wurzeln beider Formen

$$2 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1' \alpha_2') - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2')$$

und der analytische Ausdruck der harmonischen Relation zwischen beiden durch die Formen selbst bestimmten Elementenpaare aus Art. 2 bekannt ist.

Man erhält für die cubische Form

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

durch Anwendung der beiden analogen Operationssymbole

$$a_0 \frac{d^2}{dy^2} - 2a_1 \frac{d^2}{dy\,dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2},$$
$$a_3 \frac{d^2}{dx^2} - 2a_2 \frac{d^2}{dx\,dy} + a_1 \frac{d^2}{dy^2}$$

die Ergebnisse

$$a_0(a_2 x + a_3 y) - 2a_1(a_1 x + a_2 y) + a_2(a_0 x + a_1 y),$$
$$a_3(a_0 x + a_1 y) - 2a_2(a_1 x + a_2 y) + a_1(a_2 x + a_3 y),$$

d. i.

$$2x(a_0 a_2 - a_1^2) + y(a_0 a_3 - a_1 a_2),$$
$$2y(a_1 a_3 - a_2^2) + x(a_0 a_3 - a_1 a_2).$$

Der näheren Untersuchung dieser Zusammenhänge gehört das Folgende an.

Wenn man zuerst noch einmal das für zwei quadratische Formen vorher gegebene Beispiel betrachtet, so fällt in die Augen, dass in dem Symbol

$$a_0 \frac{d^2}{dy^2} - 2a_1 \frac{d^2}{dydx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2},$$

dessen Differentiale sich auf die zweite jener Formen beziehen, die Coefficienten a_0, a_1, a_2, als die zweiten Differentiale

$$\frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^2}{dx\,dy}, \frac{d^2}{dy^2}$$

respective, bezogen auf die erste Gleichung, angesehen werden können. Unterscheidet man dann die Veränderlichen beider Formen als

$$x, y \text{ und } x', y',$$

als welche aber stets gleichzeitig und durch dieselben Substitutionen transformiert werden, so kann man jenes Symbol als die Entwickelung von

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}\frac{d}{dy}\right)^2$$

ansehen. Und in der That lässt sich leicht zeigen, dass Symbole wie

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}\frac{d}{dy}$$

und alle Potenzen desselben covariante Operationssymbole sind; es genügt, daran zu erinnern, dass

$$xy' - x'y$$

ein invariantes Symbol ist, weil durch die gleichzeitigen Substitutionen

$$x = \beta X + \gamma Y,\ y = \beta' X + \gamma' Y,\ x' = \beta X' + \gamma Y',\ y' = \beta' X' + \gamma' Y'$$

$$xy' - x'y = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(XY' - X'Y)$$

gefunden wird, und dass die Differentialquotienten, vom Vorzeichen abgesehen, ebenso wie die Veränderlichen selbst transformiert werden.

Für zwei Formen u, v erhält man durch das Symbol

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}$$

die in der Theorie der Elimination bedeutungsvolle Jacobi'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix}.$$

Jede gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen

$$u = 0, \quad v = 0$$

reduciert auch diese Covariante auf den Werth Null.

Wenn diese Symbole sich zunächst auf zwei binäre Formen anwenden, so gelangt man zu Operationsformeln für eine binäre Form, welche unten von anderen Gesichtspunkten aus wieder gefunden werden, wenn man diese beiden Formen als identisch voraussetzt.

Beispielsweise entspringt mit dieser Identität aus

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}\frac{d}{dy}\right)^2$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2}{dy'^2} + \frac{d^2}{dx'^2}\frac{d^2}{dy^2} - 2\frac{d^2}{dx\,dy}\frac{d^2}{dx'\,dy'}$$

das neue Symbol

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{d^2}{dx\,dy}\right)^2.$$

Aber diess gilt nur von Symbolen mit geradzahligen Exponenten; diejenigen, welche ungeradzahligen Exponenten entsprechen, verschwinden identisch. Wenn allgemein das Symbol

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}\frac{d}{dy}\right)^n$$

unter der Voraussetzung $n = 2k$ auf die Form des nämlichen Grades

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n \between x, y)^n$$

angewendet wird, so erhält man eine quadratische Invariante, und die allgemeine Form derselben ist

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 a_{n-2} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2.1.2\ldots\frac{n}{2}} . a_{\frac{n}{2}}^2$$

Die Entwickelung derselben soll weiterhin als ein Beispiel des Gebrauchs allgemeiner Gesetze gegeben werden.

Es erhellt aber endlich aus derselben einfachen Betrachtung, dass für eine beliebige Zahl von Formen, deren Veränderliche als

$$x, y;\ x', y';\ x'', y'';\ x''', y''';\ \text{etc.}$$

von einander unterschieden werden, das Product

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}\frac{d}{dy}\right)^\lambda \left(\frac{d}{dx'}\frac{d}{dy''} - \frac{d}{dx''}\frac{d}{dy'}\right)^\mu \left(\frac{d}{dx''}\frac{d}{dy'''} - \frac{d}{dx'''}\frac{d}{dy''}\right)^\nu \ldots$$

ein covariantes Operationssymbol sein muss. Es ist offenbar, dass dasselbe durch die Voraussetzung der Identität aller dieser Formen oder mehrerer von ihnen eine weitere Quelle von Covarianten und Invarianten auch für die einfacheren und häufigeren Fälle ist.

Aber ein anderer Weg eröffnet sich mit folgender Betrachtung.

Wenn die Veränderlichen x, y und x', y' stets zugleich durch dieselben linearen Substitutionen transformiert werden,

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y,$$
$$x' = \beta X' + \gamma Y', \quad y' = \beta' X' + \gamma' Y',$$

so liefert eine Substitution der linearen Verbindungen

$$x + kx', \quad y + ky'$$

statt x, y in die Function $u = f(x, y)$ bei der Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von k für die Coefficienten dieser letzteren die allgemeine symbolische Form

$$\left(x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy}\right)^r.$$

Jeder dieser Coefficienten ist eine Covariante der ursprünglichen Form, d. h. die vorher erörterten Symbolformeln übertragen sich in allgemeinerer Gestalt auf das ganze Gebiet der Covarianten. Denn man hat

$$\beta X + \gamma Y + k(\beta X' + \gamma Y') = \beta(X + kX') + \gamma(Y + kY'),$$

d. h. es ist von demselben Erfolge, ob man in der Originalform zuerst $x+kx'$, $y+ky'$ für x und y einsetzt und dann durch lineare Substitution transformiert, oder ob man diese letztere zuerst vollzieht und sodann für X und Y die Werthe $X+kX'$, $Y+kY'$ einführt. Wenn also bei der vorgesetzten Transformation die Originalform $u=f(x,y)$ in die neue Form

$$U=f(X,Y)$$

übergeht, so liefert die Substitution

$$x+kx',\quad y+ky'$$

für x und y in

$$u=f(x,y)$$

nothwendig dasselbe Resultat, wie die Substitution von

$$X+kX',\quad Y+kY'$$

für X und Y in

$$U=f(X,Y).$$

Und da endlich k eine vollkommen unbestimmte Grösse ist, so müssen die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von k in den beiden Entwickelungen identisch übereinstimmen, welche mittelst des Taylor'schen Satzes für beide Operationen sich ergeben.

Man erhält also

$$\left(x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dy}\right)^r=\left(X'\frac{dU}{dX'}+Y'\frac{dU}{dY'}\right)^r,$$

wenn man durch das Symbol

$$\left(x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dy}\right)^r$$

die Entwickelung

$$x'^r\frac{d^ru}{dx^r}+rx'^{r-1}y'\frac{d^ru}{dx^{r-1}dy}+\frac{r(r-1)}{1.2}x'^{r-2}y'^2\frac{d^ru}{dx^{r-2}dy^2}+\ldots+y'^r\frac{d^ru}{dy^r}$$

abkürzend bezeichnet.

Es scheint geeignet, hier anzudeuten, welches der geometrische Sinn dieser Substitutionen ist; wenn die Veränderlichen x, y dem analytischen Ausdruck eines geometrischen Gebildes angehören und x', y' einem Element entsprechen, welches mit jenem in fester Verbindung ist, so werden beide Gruppen von Veränderlichen einer Coordinatentransformation entsprechend gleichzeitig auf gleiche Weise, d. i. durch die nämliche Substitution transformiert. Der Einführung von

$$x + kx', \quad y + ky' \text{ statt } x, y,$$

oder von

$$X + kX', \quad Y + kY' \text{ statt } X, Y$$

entspricht aber die Auffassung von Elementen, die zu den ursprünglichen in einfachster unveränderlicher Beziehung stehen: Theilpunkten der geradlinigen Strecke zwischen den Originalpunkten, Theilstrahlen des Winkels zwischen den Originalstrahlen, welche beide dem durch die Constante k bestimmten Theilungsverhältniss entsprechen.

In der Ebene, d. i. bei homogenen Formen mit drei und im Raume oder bei Formen mit vier Veränderlichen, führen die analogen Betrachtungen zur analytischen Theorie der Polaren, wie es als bekannt gelten kann.*)

Von diesen Formen gilt der folgende Satz: Wenn in der Entwickelung von

$$\left(x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy}\right)^r$$

zuerst die Grössen x, y als Constante und x', y' allein als Veränderliche betrachtet werden, so ist jede ihrer Invarianten eine Covariante der Originalform, sobald man in ihr x, y wieder als Veränderliche gelten lässt.

Denn sobald in dem Ausdruck

$$\left(x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy}\right)^r$$

die Grössen x', y' allein transformiert werden, so dass derselbe in die Form

$$a_0 X'^r + r a_1 X'^{r-1} Y' + \frac{r(r-1)}{1.2} a_2 X'^{r-2} Y'^2 + \ldots$$

übergeht, so ist eine Invariante dieses Ausdrucks eine Function seiner Coefficienten, die nur durch eine Potenz der

---

*) Man kann dafür vergleichen G. Salmon, „A treatise on the higher plane Curves," p. 54 f. oder des Verfassers dieser Schrift Abhandlung über „die Theorie der Pole und Polaren bei Curven höherer Ordnung" in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch etc., Bd. IV, p. 112 f.

Für die weitere Entwickelung dieser Verhältnisse ist auf die in Vorbereitung begriffene deutsche Ausgabe von G. Salmon's „Lessons introd to the modern higher Algebra" zu verweisen.

Substitutionsdeterminante von der gleichgebildeten Function der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ verschieden ist. Nach dem Vorhergehenden gehen aber eben diese Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ durch die lineare Transformation von x, y in

$$\frac{d^r U}{dX^r}, \quad \frac{d^r U}{dX^{r-1}dY}, \text{ etc.}$$

über und jede Invariante des entwickelten symbolischen Ausdrucks

$$\left(x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dx}\right)^r$$

für constante x, y ist daher eine Function der Differentiale der gegebenen Form, welche durch die lineare Transformation in eine gleiche Function der Differentiale der transformierten Form übergeht, d. h. eine Covariante derselben.

Wenn vorher gezeigt wurde, dass jede binäre Form von geradem Grade eine quadratische Invariante besitzt, so sieht man nun, dass jede derselben ein allgemeines Covariantensymbol hervorbringt.

Der Ueberblick jener quadratischen Invarianten

$a_0 a_2 - a_1^2$ für die quadratischen,

$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$ für die biquadratischen Formen,

$a_0 a_6 - 6a_1 a_5 + 15a_2 a_4 - 10a_3^2$ für die Formen des sechsten Grades, etc.

liefert auf Grund der jetzigen Betrachtungen die covarianten Symbole

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2,$$

anwendbar auf alle binären Formen, deren Grad nicht kleiner als zwei ist;

$$\frac{d^4u}{dx^4}\frac{d^4u}{dy^4}-4\frac{d^4u}{dx^3\,dy}\frac{d^4u}{dx\,dy^3}+3\left(\frac{d^4u}{dx^2\,dy^2}\right)^2,$$

für Formen, deren Grad mindestens gleich vier ist, etc.

Als Beispiele der daraus entspringenden Covarianten können die durch das erste Symbol aus Formen des dritten und vierten Grades abgeleiteten des zweiten und vierten Grades dienen, welche hier stehen

$$x^2(a_0 a_2 - a_1^2) + 2xy\frac{(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2} + y^2(a_1 a_3 - a_2^2),$$

und

$$x^4(a_0a_2-a_1^2)+4x^3y\frac{(a_0a_3-a_1a_2)}{2}+6x^2y^2\frac{(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)}{6}$$
$$+4xy^3\frac{(a_1a_4-a_2a_3)}{2}+y^4(a_2a_4-a_3^2).$$

Dabei knüpft sich an das erste dieser Beispiele die Bemerkung, dass jede Form von ungeradem Grade eine Covariante besitzt, die in den Coefficienten wie in den Veränderlichen vom zweiten Grade ist. Der Ausdruck

$$\left(x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dy}\right)^{n-1}$$

(wenn n der Grad der gegebenen Form ist) ist für eine solche Form von geradem Grade in x', y' und vom ersten Grade in x, y; wenn man daher auf ihn dasjenige unter den vorhergehenden covarianten Operationssymbolen anwendet, welches eine Invariante seines Grades in x', y' liefert, so erhält man die bezeichnete Covariante.

Man kann endlich aus so gewonnenen Covarianten nach den vorher auseinandergesetzten Regeln neue Invarianten bilden, um von diesen nach den jetzt entwickelten Betrachtungen über den Zusammenhang derselben mit covarianten Operationssymbolen zu neuen covarianten Formen überzugehen.

So erhält man z. B. aus der Form des vierten Grades

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x_1 y)^4$$

nach dem Früheren das Invariantensymbol

$$a_0\frac{d^4}{dy^4}-4a_1\frac{d^4}{dy^3\,dx}+6a_2\frac{d^4}{dy^2\,dx^2}-4a_3\frac{d^4}{dy\,dx^3}+a_4\frac{d^4}{dx^4}.$$

Wenn man diess auf die oben gegebene Covariante des vierten Grades der biquadratischen Form anwendet, d. i. auf

$$x^4(a_0a_2-a_1^2)+4x^3y\frac{(a_0a_3-a_1a_2)}{2}+6x^2y^2\frac{(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)}{6}$$
$$+4xy^3\frac{(a_1a_4-a_2a_3)}{2}+y^4(a_2a_4-a_3^2),$$

so erhält man die neue Invariante

$$a_0(a_2a_4-a_3^2)-4a_1\frac{(a_1a_4-a_2a_3)}{2}+6a_2\frac{(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)}{6}$$
$$-4a_3\frac{(a_0a_3-a_1a_2)}{2}+a_4(a_0a_2-a_1^2)$$

oder

$$a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3.$$

In Folge dessen aber ist

$$\frac{d^4}{dx^4}\frac{d^4}{dx^2\,dy^2}\frac{d^4}{dy^4} - \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{d^4}{dx\,dy^3}\right)^2 - \left(\frac{d^4}{dx^3\,dy}\right)^2\frac{d^4}{dy^4}$$
$$+ 2\frac{d^4}{dx^3\,dy}\frac{d^4}{dx^2\,dy^2}\frac{d^4}{dx\,dy^3} - \left(\frac{d^4}{dx^2\,dy^2}\right)^3$$

ein neues covariantes Symbol für alle Formen, deren Grad vier übersteigt.

Um die Mannichfaltigkeit der Entwickelungsmethoden zu veranschaulichen, ohne uns doch allzusehr in derselben zu verlieren, mögen hier nur noch zwei allgemeinere Sätze bezüglich derselben bewiesen sodann aber einige Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen dargelegt werden.

Der eine von ihnen knüpft sich an das covariante Operationssymbol

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2,$$

welches oben gegeben ist; man kann dasselbe in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2u}{dx^2}, & \frac{d^2u}{dx\,dy} \\ \frac{d^2u}{dx\,dy}, & \frac{d^2u}{dy^2} \end{vmatrix}$$

schreiben, die man nach dem Geometer, der die ersten und bedeutendsten Anwendungen von ihr gemacht hat, die Hesse'sche nennt, und es alsdann als den einfachsten speciellen Fall ($m = 1$) der folgenden symmetrischen Determinante ansehen

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-2}dy^2}, & \cdots \\ \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-2}dy^2}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-3}dy^3}, & \cdots \\ \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-2}dy^2}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-3}dy^3}, & \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-4}dy^4}, & \cdots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

oder

$$\Sigma \pm \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}} \cdot \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-2}dy^2} \cdot \frac{d^{2m}u}{dx^{2m-4}dy^4}, \ldots \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}} = \triangle_m.$$

Dieselbe repräsentiert stets eine Covariante oder Invariante der ursprünglichen Form

$$u = 0.$$

Denn durch die Substitution

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

und für

$$i + j = m$$

geht der Differentialquotient

$$\frac{d^m u}{dx^i dy^j}$$

in die neue Form

$$\frac{d^m u}{dX^i dY^j}$$

über, und man hat

$$\frac{d^m u}{dX^i dY^j} = l_{i,j} \frac{d^m u}{dx^m} + l_{i,j}^{(1)} \frac{d^m u}{dx^{m-1} dy} + \ldots + l_{i,j}^{(m)} \frac{d^m u}{dy^m},$$

worin $l_{i,j}^{(p)}$ Functionen der Substitutionscoefficienten sind, deren Gesetz aus folgenden Werthen deutlich hervorgeht

$$l_{i,j} = \beta^i \gamma^j,$$

$$l_{i,j}^{(1)} = i\beta^{i-1} \beta' \gamma^j + j\beta^i \gamma^{j-1} \gamma',$$

$$l_{i,j}^{(2)} = \frac{i(i-1)}{1.2} \beta^{i-2} \beta'^2 \gamma^j + ij\beta^{i-1} \gamma \beta'^{j-1} \gamma' + \frac{j(j-1)}{1.2} \beta^i \gamma^{j-2} \gamma'^2,$$

$$\vdots$$

$$l_{i,j}^{(m-2)} = \frac{i(i-1)}{1.2} \beta^2 \beta'^{i-2} \gamma'^j + ij\beta\gamma^{i-1} \beta' \gamma'^{i-1} + \frac{j(j-1)}{1.2} \beta'^i \gamma^2 \gamma'^{j-2},$$

$$l_{i,j}^{(m-1)} = i.\beta\beta'^{i-1} \gamma'^j + j.\beta'^i \gamma \gamma'^{j-1},$$

$$l_{i,j}^{(m)} = \beta'^i \gamma'^j,$$

Die zu betrachtende Determinante wird durch dieselbe Substitution in

$$\Sigma \pm \frac{d^{2m}U}{dX^{2m}} \cdot \frac{d^{2m}U}{dX^{2m-2}dY^2} \ldots \frac{d^{2m}U}{dY^{2m}} = \triangle^*_m$$

übergeführt und kann darnach wie folgt zusammengesetzt werden. Sei die Determinante aus den eben dargestellten Coefficienten der transformierten Differentiale

$$\Sigma \pm l_{m,0} \,.\, l^{(1)}_{m-1,1} \,.\, l^{(2)}_{m-2,2} \ldots l^{(m)}_{0,m} = L,$$

und die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{d^{2m} u}{dX^m dx^m} \,.\, \frac{d^{2m} u}{dX^{m-1} dY dx^{m-1} dy} \cdots \frac{d^{2m} u}{dY^m dy^m} = H,$$

so bestehen nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten die Relationen

$$L \,.\, \Delta_m = H$$

und

$$L \,.\, H = \Delta^*_m = L^2 \,.\, \Delta_m.$$

Es bleibt also zum Beweis der ausgesprochenen Behauptung nur noch zu zeigen übrig, dass L mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)$$

übereinstimme.

Dazu sei

$$\frac{\beta'}{\beta} = b, \quad \frac{\gamma'}{\gamma} = c$$

und

$$\frac{l^{(g)}_{i,j}}{\beta^i \gamma^j} = b^{(g)}_{i,j};$$

man dividiere alle Elemente der ersten Reihe der Determinante L durch β^m, alle der zweiten durch $\beta^{m-1}\gamma$, der dritten durch $\beta^{m-2}\gamma^2$, etc...., der letzten durch γ^m, so erhält man

$$L = \beta^{\frac{m(m+1)}{2}} \gamma^{\frac{m(m+1)}{2}} \,.\, \begin{vmatrix} b_{m,0}\,, & b^{(1)}_{m,0}\,, & \ldots & b^{(m)}_{m,0} \\ b_{m-1,1}, & b^{(1)}_{m-1,1}, & \ldots & b^{(m)}_{m-1,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{0,m}\,, & b^{(1)}_{0,m}\,, & \ldots & b^{(m)}_{0,m} \end{vmatrix}$$

$$= (\beta\gamma)^{\frac{m(m+1)}{2}} \,.\, B_m.$$

Unter den Elementen dieser Determinante B_m bestehen aber die folgenden Relationen:

$$b_{i-1,j+1} - b_{i,j} = 0, \quad b^{(1)}_{i-1,j+1} - b^{(1)}_{i,j} = c - b,$$

$$b^{(2)}_{i-1,j+1} - b^{(2)}_{i,j} = (c-b)\, b^{(1)}_{i-1,j}, \quad b^{(3)}_{i-1,j+1} - b^{(3)}_{i,j} = (c-b)\, b^{(2)}_{i-1,j}, \text{ etc.}$$

Man transformiert dieselbe also durch Subtraction der Elemente jeder folgenden Reihe von denen der vorhergehen-

den, indem man noch beachtet, dass in Folge dessen jedes Glied der ersten Reihe durch $(c-b)$ theilbar wird, in

$$B_m = (c-b)^m . \begin{vmatrix} 1, & b^{(1)}_{m-1,0}, & \dots & b^{(m-1)}_{m-1,0} \\ 1, & b^{(1)}_{m-2,1}, & \dots & b^{(m-1)}_{m-2,1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & b^{(1)}_{0,m-1}, & \dots & b^{(m-1)}_{0,m-1} \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)^m . B_{m-1};$$

und erhält somit durch successive Ausmittelung

$$B_m = (c-b)^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

in Folge dessen aber nach dem Vorigen

$$L = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

womit der Satz bewiesen ist.*)

Man darf natürlich statt der Function u selbst eine beliebige bereits bekannte Covariante derselben den angegebenen Operationen unterwerfen, ohne den Erfolg zu verändern.

Man erhält vermittelst derselben Invarianten der Form, wenn der Grad derselben $n = 2m$ ist, also nur für Formen gerader Grade; der allgemeine Ausdruck der so entspringenden Invariante der Form n^{ten} Grades ist die symmetrische Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{\frac{n}{2}} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_{\frac{n}{2}+1} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{\frac{n}{2}}, & a_{\frac{n}{2}+1}, & \dots & a_n \end{vmatrix};$$

sie ist vom Grade $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ in den Coefficienten der Form, also für Formen des 2., 4., 6., 8. Grades respective vom 2., 3., 4., 5. Grade, z. B. für die Form des vierten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix},$$

*) Vergl. Brioschi in den Annalen von Tortolini t. I, (1858.)

welche durch Entwickelung als

$$= a_0 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_2^3,$$

die schon gefundene cubische Invariante biquadratischer Formen erkannt wird; die gegenwärtige Entwickelungsweise hat die symmetrische Determinantenform ihrem Ausdruck hinzugefügt.

Ueberdiess lassen sich aber aus bekannten Covarianten einer binären Form neue Covarianten derselben Form ableiten nach noch wesentlich allgemeineren als den früher erörterten Methoden.

Sind nämlich

$$f_1 \text{ und } f_2$$

bekannte Covarianten der Form

$$u = 0,$$

so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_2}{dx} \\ \frac{df_1}{dy}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

gleichfalls eine Covariante von u.

Denn wenn aus $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ durch die lineare Transformation

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

die neuen Functionen

$$F_1(X, Y) \text{ und } F_2(X, Y)$$

werden, so hat man

$$\frac{dF_1}{dX} = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n_1} \left(\beta \frac{df_1}{dx} + \beta' \frac{df_1}{dy}\right),$$

$$\frac{dF_1}{dY} = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n_1} \left(\gamma \frac{df_1}{dx} + \gamma' \frac{df_1}{dy}\right),$$

$$\frac{dF_2}{dX} = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n_2} \left(\beta \frac{df_2}{dx} + \beta' \frac{df_2}{dy}\right),$$

$$\frac{dF_2}{dY} = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n_2} \left(\gamma \frac{df_2}{dx} + \gamma' \frac{df_2}{dy}\right),$$

und erhält daraus leicht die Gleichung

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^{n_1 + n_2 + 1} \left(\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dx}\right) = \frac{dF_1}{dX}\frac{dF_2}{dY} - \frac{dF_1}{dY}\frac{dF_2}{dX},$$

welche den ausgesprochenen Satz beweist.

Sodann eröffnet ein Satz von Hermite eine noch reichere Quelle und bildet den Ausgangspunkt einer besonderen Theorie; es genüge, auf ihn zu verweisen.*)

19.

Als eine einfache Anwendung einiger der so gewonnenen Formen sei die Gleichung untersucht, die man als „Equation aux carrés de différences“ einer gegebenen Gleichung bezeichnet. Man kann die symmetrischen Functionen ihrer Wurzeln mit Hilfe der quadratischen Invarianten binärer Formen von geradem Grade einfach ausdrücken.

Sei

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots \between x, y)^n = 0$$

die vorgelegte Gleichung, bezeichnen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ wie früher die Summen gleicher Potenzen ihrer Wurzeln und $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ die entsprechenden Summen gleicher Potenzen für die Gleichung der Differenzenquadrate, so hat man nach dem Begriff der Summe Σ_i

$$\Sigma_i = (n-1)\, s_{2i} - 2i\, \Sigma \alpha_1^{2i-1} \alpha_2 + \frac{2i(2i-1)}{1.2} \Sigma \alpha_1^{2i-2} \alpha_2^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^i \frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(i+1)}{1.2.3\ldots i} \Sigma \alpha_1^i \alpha_2^i,$$

und da aus der Theorie der symmetrischen Functionen die Relationen

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_1^{2i-1} \alpha_2 &= s_{2i-1} s_1 - s_{2i}, \\ \Sigma \alpha_1^{2i-2} \alpha_2^2 &= s_{2i-2} s_2 - s_{2i}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \Sigma \alpha_1^i \alpha_2^i &= \tfrac{1}{2}(s_i^2 - s_{2i}) \end{aligned}$$

entspringen, so geht mit der gestatteten Vertretung von n durch s_0 dieselbe in die folgende über

*) Man vergleiche Crelle's „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, Bd. 52, p. 21 f. Dazu Brioschi's Abhandlung im VII. Bande der „Annali di Scienze“ (1856) von Tortolini p. 231, 335 und im I. Bande der „Annali di Matem.“ (1858), p. 349.

$$\Sigma_i = s_0 s_{2i} - 2i s_{2i-1} s_1 + \frac{2i(2i-1)}{1.2} s_{2i-2} s_2 - \dots$$
$$+ (-1)^i \frac{(2i-1)(2i-2)\dots(i+1)}{1.2\dots(i-1)} s_i^2.$$

Diese aber ist die quadratische Invariante der Form

$$(s_0, s_1, s_2, \dots s_{2i} \between x, y)^{2i}.$$

Für die Gleichung der Differenzenquadrate einer vorgelegten Gleichung ist also die Summe der i^{ten} Potenzen der Wurzeln die quadratische Invariante der Form

$$(s_0, s_1, \dots s_{2i} \between x, y)^{2i}.$$

Für $i = 1, 2, 3, 4$ berechnet, gelangt man damit zu einer Reihe merkwürdiger Formeln, welche von M. Roberts zuerst gegeben worden sind.*)

Die quadratischen Invarianten der Formen des 2., 4., 6. und 8. Grades, welche zum Theil in dem Vorigen schon gelegentlich entwickelt sind oder aus ihrer angegebenen allgemeinen Form leicht entwickelt werden können, sind

$$J_{2,2} = a_0 a_2 - a_1^2,$$
$$J_{4,2} = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$J_{6,2} = a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2,$$
$$J_{8,2} = a_0 a_8 - 8 a_1 a_7 + 28 a_2 a_6 - 56 a_3 a_5 + 35 a_4^2.$$

Bezeichnen analog $J_{4,3}$ und $J_{6,3}$ die cubischen Invarianten der Form des 4. und 6. Grades respective, so hat man

$$J_{4,3} = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3,$$
$$J_{6,3} = a_0 a_2 a_6 - 3 a_0 a_3 a_5 + 2 a_0 a_4^2 - a_1^2 a_6 + 3 a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4 + 2 a_2 a_3^2$$
$$- 3 a_2^2 a_4,$$

und erhält durch Entwickelung der vorigen allgemeinen Relation für diese speciellen Fälle die Formeln

$$a_0^2 \Sigma_1 = - n^2 (n-1) J_{2,2},$$
$$a_0^4 \Sigma_2 = n^2 (n-1) \left[n^2 J_{2,2}^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{6} a_0^2 J_{4,2} \right],$$
$$a_0^6 \Sigma_3 = - n^2 (n-1) \left[n^4 J_{2,2}^3 - \frac{n^2 (n-2)(n-5)}{4} a_0^2 . J_{2,2} . J_{4,2} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-2)(7n-15)}{4} a_0^3 J_{4,3} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5} a_0^4 J_{6,2} \right],$$

*) „Nouvelles Annales de Mathém.“, t. XIX, p. 23.

$$a_0^8 \Sigma_4 = n^2(n-1)\Big[n^6 J_{2,2}^4 - \frac{n^4(n-2)(n-7)}{3} a_0^2 . J_{2,2}^2 . J_{4,2}$$
$$- 2n^3(n-2)(3n-7) a_0^3 J_{2,2} . J_{4,3} + \frac{n^2(n-2)(n-3)(n^2+8n-21)}{72} a_0^4 J_{4,2}^2$$
$$+ \frac{n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-21)}{90} a_0^4 J_{2,2} J_{6,2} + \frac{n(n-2)(n-3)(n-4)(3n-7)}{9} a_0^5 J_{6,3}$$
$$- \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4.5.6.7} a_0^6 J_{8,2}\Big].$$

Man erhält daraus für $n=2$, $n=3$ die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
a_0^2 \Sigma_1 &= a_0^2 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2 = -4(a_0a_2-a_1^2),\\
a_0^4 \Sigma_2 &= a_0^4 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^4 = 4.4(a_0a_2-a_1^2)^2,\\
a_0^6 \Sigma_3 &= a_0^6 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^6 = -4.16(a_0a_2-a_1^2)^3,\\
a_0^8 \Sigma_4 &= a_0^8 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^8 = 4.64(a_0a_2-a_1^2)^4;\\
a_0^2 \Sigma_1 &= a_0^2 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2 = -18(a_0a_2-a_1^2),\\
a_0^4 \Sigma_2 &= a_0^4 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^4 = 18.9(a_0a_2-a_1^2)^2,\\
a_0^6 \Sigma_3 &= a_0^6 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^6 = -18.81(a_0a_2-a_1^2)^3,\\
a_0^8 \Sigma_4 &= a_0^8 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^8 = 18.729(a_0a_2-a_1^2)^4.
\end{aligned}$$

Für $n=4$ verschwindet die hier ausgeprägte einfache Proportionalität, denn man erhält z. B.

$$a_0^2\Sigma_1 = a_0^2\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2 = -48(a_0a_2-a_1^2),$$
$$a_0^4\Sigma_2 = a_0^4\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^4 = 48\Big[16(a_0a_2-a_1^2)^2 - \frac{a_0^2}{3}(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)\Big],$$

etc.

Wenn man die Summen gleicher Potenzen der Wurzeln für die Gleichung der Differenzenquadrate kennt, so kann man auch sie selbst bilden, indem man nach der Theorie der symmetrischen Functionen ihre Coefficienten bestimmt.

Man erhält die Coefficienten ihres dritten und vierten Gliedes z. B. in folgender Form

$$2a_0^4 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2 = -n^2(n-1)(n-2)\Big[n^2 J_{2,2}^2 - \frac{n-3}{6} a_0^2 J_{4,2}\Big],$$

$$6a_0^6 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 = -n^2(n-1)(n-2)\Big[n^4(n-3) J_{2,2}^3$$
$$+ \frac{n^2(n^2-5n+8)}{2} a_0^2 J_{2,2} . J_{4,2} - \frac{n(7n-15)}{2} a_0^3 J_{4,3}$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{60} a_0^4 J_{6,2}\Big].$$

Also für $n=3$

$$a_0^4 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2 = -81 . J_{2,2}^2,$$

und für $n=4$

$$a_0^4 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2 = -48\left[16 J_{2,2}^2 - \frac{a_0^2}{6} J_{4,2}\right],$$

$$3a_0^6 \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 = -48.[256 J_{2,2}^3 + 32a_0^2 J_{2,2}.J_{4,2} - 26a_0^3 J_{4,3}]$$

etc.

Für die Gleichung des vierten Grades hat M. Roberts das Resultat dieser Entwickelung gegeben; man erhält es mit Beibehaltung der gewählten Bezeichnungen in der Form

$$\begin{aligned}
&1728 t^2 (a_0^2 t + 12 J_{2,2})^4 \\
&\quad + 32.144 t^2 (a_0^2 J_{4,2} - 12 J_{2,2}^2)(3a_0^4 t^2 + 88 a_0^2 J_{2,2} t + 648 J_{2,2}^2 - 42 a_0^2 J_{4,2}) \\
&\quad + 72.256 a_0^2 t (2 J_{2,2}.J_{4,2} - 3 a_0 J_{4,3})(13 a_0^2 t^2 + 144 J_{2,2} t + 108 J_{4,2}) \\
&\quad + 108.4096 a_0^2 (J_{4,2}^3 - 27 J_{4,2}^2) = 0,
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
&a_0^6 t^6 + 48 a_0^4 J_{2,2}.t^5 + 8 a_0^2 (a_0^2 J_{4,2} + 96 J_{2,2}^2) t^4 \\
&\quad + 32(128 J_{2,2}^3 + 16 a_0^2 J_{2,2} J_{4,2} - 13 a_0^3 J_{4,3}) t^3 \\
&\quad + 16(384 J_{2,2}^2 J_{4,2} - 288 a_0 J_{2,2} J_{4,3} - 7 a_0^2 J_{4,2}^2) t^2 \\
&\quad + 1152 J_{4,2}(2 J_{2,2} J_{4,2} - 3 a_0 J_{4,3}) t \\
&\quad + 256(J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2) = 0
\end{aligned}$$

durch folgendes Verfahren, auf welches hier eingegangen wird, weil es zugleich mit der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades direct zusammenhängt.

Sei

$$l = \frac{-J_{4,3} + \sqrt[2]{J_{4,3}^2 + 64 J_{2,2}^3}}{8 a_0^3}, \quad m = \frac{-J_{4,3} - \sqrt[2]{J_{4,3}^2 + 64 J_{2,2}^3}}{8 a_0^3},$$

so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a_0}, & -l^{\frac{1}{3}}, & -m^{\frac{1}{3}} \\ -l^{\frac{1}{3}}, & -m^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a_0} \\ -m^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a_0}, & -l^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{4 a_0^3}$$

und

$$\Delta = 0$$

oder

$$-4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda + J_{4,3} = 0$$

die Gleichung von Aronhold, dieselbe Gleichung, auf welche auch Cayley, Hermite und Hesse in ihren Untersuchun-

gen geführt worden sind. Man gelangt zu ihr, indem man nach der Methode von **Euler** in

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$
$$y=ax+b$$

einführt, so dass man

$$y^4+6(a_0a_2-a_1^2)y^2+4(2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_4)y$$
$$-(3a_1^4-6a_0a_1^2a_2+4a_0^2a_1a_3-a_0^3a_4)=0$$

erhält, und hier

$$y=\sqrt{A\lambda_1+B}+\sqrt{A\lambda_2+B}+\sqrt{A\lambda_3+B}=t'+u'+v'$$

setzt, wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3-p\lambda+q=0$$

sind. Dann gelten die Relationen

$$\Sigma\lambda_1=0,\quad \Sigma\lambda_1\lambda_2=-p,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=-q.$$

Auf Grund der ersten unter ihnen und wegen

$$y=t'+u'+v'$$

erhält man

$$y^2-3B=2(t'u'+u'v'+v't'),$$

daraus durch abermaliges Quadrieren

$$y^4-6By^2+9B^2=4(t'^2u'^2+u'^2v'^2+v'^2t'^2)+8t'u'v'y$$
$$=4(3B^2-A^2p)+8t'u'v'y,$$

also

$$y^4-6By^2-8t'u'v'y-(3B^2-4A^2p)=0,$$

und durch Vergleichung mit der oben erhaltenen biquadratischen Gleichung in y

$$B=a_1^2-a_0a_2=-J_{2,2};\quad p=\frac{a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)}{4A^2},$$

so dass man zugleich $A=a_0$ setzen darf.

Da man dann erhält

$$t'u'v'=\sqrt[2]{B^3-A^2Bp-A^2q},$$

so liefert die Gleichung

$$4(2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_4)=-8\sqrt[2]{(a_1^2-a_0a_2)^3-a_0^2(a_1^2-a_0a_2)p-a_0^3q},$$

und daraus

$$q=\frac{a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3}{4}=\frac{J_{4,3}}{4},$$

so dass

$$\lambda^3-p\lambda+q=0$$

in

$$4\lambda^3-J_{4,2}\lambda+J_{4,3}=0$$

übergeht, welche Gleichung direct nach der **Cardani**'schen Regel aufgelöst werden kann und bis auf das Vorzeichen des

absoluten Gliedes mit der Aronhold-Cayley'schen Gleichung übereinstimmt. Ihre Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen die Werthe von y nach der vorausgesetzten Formel. Aber auch dieser Theil der Lösung lässt sich nach dem Vorigen einfach darstellen. Man hat aus der Determinantenform von Aronhold

$$\frac{1}{a_0}\frac{d\triangle}{d a_4} = \frac{J_{2,2}}{a_0} + \lambda$$

und erhält für die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 nach einem sofort anzugebenden Satze die Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{a_0} = l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$
$$\frac{\lambda_2}{a_0} = \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$
$$\frac{\lambda_3}{a_0} = \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}},$$

wenn ω eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit bezeichnet. Derselbe lautet:

Für n beliebige Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ und ω als eine primitive Wurzel der binomischen Gleichung

$$\omega^n - 1 = 0$$

hat man den Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} b_1, & b_2, & \ldots & b_{n-1}, & b_n \\ b_2, & b_3, & & b_n, & b_1 \\ b_3, & b_4, & & b_1, & b_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ b_n, & b_1, & & b_{n-2}, & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

durch das Product

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . \Theta_1 . \Theta_2 \ldots \Theta_n,$$

wenn

$$\Theta_i = b_1 + b_2\omega_i + b_3\omega_i^2 + \ldots + b_n\omega_i^{n-1}$$

ist, mit

$$\omega_i = \omega^i.$$

Man erkennt diess durch Multiplication der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} b_1, & b_2, & \ldots & b_n \\ b_2, & b_3, & \ldots & b_1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_n, & b_1, & \ldots & b_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ 1, & \omega_1, & \ldots & \omega_n \\ 1, & \omega_1^2, & \ldots & \omega_n^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & \omega_1^n, & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix};$$

denn da die Elemente der Zeilen der als Product entspringenden Determinante durch $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ theilbar sind, so ist das Product

$$= \Theta_1 \cdot \Theta_2 \ldots \Theta_n \begin{vmatrix} 1, & 1 & , \ldots & 1 \\ 1, & \omega_n & , \ldots & \omega_n^n \\ 1, & \omega_{n-1}, & \ldots & \omega_{n-1}^n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & \omega_1 & , \ldots & \omega_1^n \end{vmatrix},$$

und man erkennt sofort, dass die Determinante, welche in demselben auftritt, sich von der Determinante des zweiten Factors nur durch den Factor

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

unterscheidet.

Durch Anwendung dieses Satzes auf den gegenwärtigen Fall erhält man jene oben gegebenen Gleichungen für die Werthe

$$\frac{\lambda_i}{a_0}$$

und erkennt daraus

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{d\triangle}{dl}\right)_1 = \frac{J_{2,2}}{a_0^2} + l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{d\triangle}{dl}\right)_2 = \frac{J_{2,2}}{a_0^2} + \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{d\triangle}{dl}\right)_3 = \frac{J_{2,2}}{a_0^2} + \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}};$$

die Werthe der Wurzeln der reducierten Gleichung des dritten Grades in der Methode von Euler.

Hiernach gelangt man zur Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln, indem man aus

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} + \sqrt[2]{l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}} + \sqrt[2]{\omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}}$$
$$+ \sqrt[2]{\omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0} + \sqrt[2]{l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}} - \sqrt[2]{\omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}}$$
$$- \sqrt[2]{\omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}}$$

$$t = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = 4\left\{\sqrt[2]{\omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}} + \sqrt[2]{\omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}} - \frac{J_{2,2}}{a_0^2}}\right\}^2$$

zieht; diess giebt durch Entwickelung nach einander

$$\left(\frac{t}{4}+\frac{2J_{2,2}}{a_0^2}+l^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}\right)^2=4\left[\frac{J_{2,2}^2}{a_0^4}-\frac{J_{2,2}}{a_0^2}(l^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}})+l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}-\frac{J_{4,2}}{12a_0^2}\right],$$

$$\frac{t^2}{16}+\frac{J_{2,2}}{a_0^2}t+\frac{J_{4,2}}{2a_0^2}=3\,(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})-\frac{t}{2}\,(l^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}),$$

und wegen

$$l^{\frac{2}{3}}=\frac{12\,l\,a_0^2}{J_{4,2}}m^{\frac{1}{3}},\quad m^{\frac{2}{3}}=\frac{12\,m\,a_0^2}{J_{4,2}}\,l^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{t^2}{16}+\frac{J_{2,2}}{a_0^2}+\frac{J_{4,2}}{2a_0^2}=\left(\frac{36\,m\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)^3 l+\left(\frac{36\,l\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)^3 m;$$

also durch Cubieren

$$\left(\frac{t^2}{16}+\frac{J_{2,2}}{a_0^2}t+\frac{J_{4,2}}{2a_0^2}\right)^3=\left(\frac{36\,m\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)^3 l+\left(\frac{36\,l\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)^3 m$$
$$+\frac{J_{4,2}}{4a_0^2}\left(\frac{36\,m\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{36\,l\,a_0^2}{J_{4,2}}-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{t^2}{16}+\frac{J_{2,2}}{a_0^2}t+\frac{J_{4,2}}{2a_0^2}\right),$$

woraus durch Entwickelung die gegebene Gleichung hervorgeht.*)

Für

$$a_0^2\,.\,J_{4,2}=12\,J_{2,2}^2 \quad\text{und}\quad a_0^3\,.\,J_{4,3}=-8\,J_{2,2}^3$$

erhält man ebensowohl

$$2\,J_{2,2}\,.\,J_{4,2}=3\,a_0J_{4,3},$$

als auch

$$J_{4,2}^3=27\,J_{4,3}^2$$

und die Gleichung der Quadrate der Differenzen reduciert sich, wie man aus der zuerst gegebenen Form am schnellsten erkennt, auf die Form

$$t^2\,(a_0^2t+12\,J_{2,2})^4=0,$$

und man erkennt, dass unter diesen Voraussetzungen die Gleichung der Quadrate der Differenzen zwei Wurzeln Null und vier gleiche Wurzeln vom Werthe

$$-\frac{12\,J_{2,2}}{a_0^2}$$

besitzt. Man kann daraus sehr leicht auf die stattfindenden Gleichheiten unter den Wurzeln der Originalgleichung schliessen; dazu leitet auch die Bemerkung an, dass ihre Discriminante D_4, das letzte Glied der Gleichung der Quadrate der Differenzen, verschwindet. Bei der speciellen Be-

---

*) Vergl. „Annali di Matematica da Tortolini," Vol. II. (1859.) p. 330.

trachtung der Formen des vierten Grades wird sich die natürlichste Gelegenheit darbieten, darauf zurückzukommen.

Eine Relation derselben Art bietet die Betrachtung des Gliedes in t in der Gleichung der Quadrate der Differenzen dar; der Coefficient dieses Gliedes ist abgesehen von a_0 und numerischen Factor

$$(2\,J_{2,2}\,.\,J_{4,2} - 3\,a_0 J_{4,3})\,J_{4,2}$$

und verschwindet also ebensowohl für

$$J_{4,2} = 0$$

als auch für

$$2\,J_{2,2}\,.\,J_{4,2} - 3\,a_0 J_{4,3} = 0.$$

Die erstere Bedingung, d. i.

$$a_0 a_4 - 4\,a_1 a_3 + 3\,a_2^2 = 0$$

bestimmt also unter den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ der biquadratischen Gleichung die Relation

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 = 0$$

oder

$$\Sigma\,\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} = 0.$$

Da der andere Factor des Gliedes in t, nämlich

$$2\,J_{2,2}\,.\,J_{4,2} - 3\,a_0 J_{4,3},$$

bis auf numerische Factoren der Determinante der Summen gleicher Potenzen der Wurzeln

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}$$

gleich ist, so ist auch das identische Verschwinden dieser Determinante die Bedingung der gedachten Relation. Wenn man bemerkt, dass das letzte Glied der Gleichung der Quadrate der Differenzen die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix}$$

ist, so erhellt die Einfachheit der Darstellung des Coefficienten des vorletzten durch

$$6\,J_{4,2}\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}$$

besonders.

Man mag noch anmerken, dass für die allgemeine Form, von welcher hier ausgegangen worden ist, in dem Falle $2i=4$ also

$$(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \between x, y)^4$$

die cubische Invariante $J_{4,3}$, d. i.

$$s_0 s_2 s_4 - s_0 s_3^2 - s_1^2 s_4 + 2 s_1 s_2 s_3 - s_2^3$$

in der Form

$$-\frac{n^3 (n-1)^2 (n-2)}{12\, a_0^4} \left\{ n J_{2,2} \,.\, J_{4,2} - 3(n-2)\, a_0 J_{4,3} \right\}$$

dargestellt werden kann.

Sie ist für $n = 4$

$$= -\frac{192}{a_0^4} (2 J_{22} J_{42} - 3 a_0 J_{4,3}),$$

was wieder auf das Vorige zurückweist.

Für

$$a_4 = 0, \; n = 3$$

entspringt aus ihr die Discriminante der binären cubischen Form

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3,$$

nämlich

$$a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3.^{*)}$$

20.

Von den auseinandergehenden Methoden zur Darstellung invarianter und covarianter Formen, welche den Gegenstand der beiden letzten Artikel ausmachen, wendet sich nun die Entwickelung zur Betrachtung allgemeiner Gesetze, welchen dieselben Genüge leisten und aus deren Kenntniss man ebenfalls zur Entwickelung solcher Formen selbst leicht gelangt, überdiess mit einer viel grösseren Aussicht darauf, alle Formen dieser Art auf dem betretenen Wege kennen lernen zu können, als dort zu gewinnen war. Man wird

---

*) Für die binomische Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

kann die Gleichung der Differenzenquadrate in der Form einer symmetrischen Determinante dargestellt werden, die M. Roberts gegeben hat, „Nouvelles Annales de Mathém." t. XX, p. 139. Die allgemeine Auflösung des Problems von der Gleichung der Quadrate der Differenzen hat unter Anwendung seiner Ausdrucksweise des Bezout'schen Eliminationsverfahrens Cayley im II. Bande der „Annali di Matematica da Tortolini" (1859) p. 365 gegeben.

im Verlaufe ihrer Entdeckung erkennen, wie direct sie an die Betrachtungen des Art. 17 anschliessen, in welchem auch schon das ganze Gebiet solcher Functionen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt betrachtet worden war.

Auch hier beginnt die Untersuchung mit der Discriminante, als auf welche sich, als eine Resultante zweier Gleichungen, die aus der gegebenen Gleichung durch Differentiation entstehen, die allgemeinen Eigenschaften der Resultanten direct übertragen lassen.

Sie ist als solche eine homogene Function der Coefficienten der gegebenen Form und in denselben vom Grade $2(n-1)$, da jede der beiden derivierten Gleichungen vom ersten Grade in den Coefficienten und vom $(n-1)^{ten}$ in den Veränderlichen ist, und die Coefficienten beider, als welche jede im $(n-1)^{ten}$ Grade in die Resultante eingehen müssen, mit denen der Form selbst übereinstimmen. So sind die Discriminanten quadratischer, cubischer und biquadratischer Formen vom 2., 4. und 6. Grade respective. Wenn man die letzte Quelle dieser Eigenschaft innerhalb des hier untersuchten Gebietes in der Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln erkennt, so findet das Nämliche statt hinsichtlich einer anderen Eigenschaft, die ebenfalls bei der Theorie der Resultanten als aus jener Quelle geflossen wiedergefunden worden ist.

Jedes Glied der Discriminante einer binären Form des n^{ten} Grades ist vom Gewicht $n(n-1)$. Das entsprechende Gesetz über die Bildung der Resultanten bestimmte, dass das Gewicht eines jeden Gliedes mit dem Product der Grade der Gleichungen übereinstimme, auf welche sie sich beziehen. Wenn nun das Product der beiden derivierten Gleichungen hier $(n-1)^2$ ist, so ist die Umwandlung dieses Ausdrucks in

$$n(n-1)$$

sehr einfach darin begründet, dass zwar in der einen derselben, nach dem Früheren in $\frac{du}{dx}=0$, die Indices der Coefficienten mit den Exponenten der entsprechenden Glieder in y übereinstimmen, dass sie aber in der anderen diese beständig um eine Einheit übersteigen.

Auf Grund dieses Gesetzes ist für quadratische, cubische und biquadratische Formen das Gewicht jedes Gliedes der Discriminante 2, 6, 12 respective, wie es der Ueberblick der bereits gegebenen Ausdrücke derselben zeigt.*)

Wenn früher gezeigt worden ist, dass jede Form von ungeradem Grade eine Covariante besitzt, die in ihren Coefficienten ebenso wie in ihren Veränderlichen vom zweiten Grade ist, so erkennt man nun, dass jede binäre Form ungeraden Grades eine Invariante vom vierten Grade haben muss. Sie ist die Discriminante der quadratischen Covariante, vom zweiten Grade in den Coefficienten derselben, also vom vierten in denen der Originalform.

So ergiebt dieselbe sich für die cubische Form aus deren früher gegebener quadratischer Covariante in der Form

$$(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - 4(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2.$$

Sie ist für die cubische Form zugleich die Discriminante selbst; nicht so für andere Formen.

Wenn das Verschwinden der Discriminante das Vorhandensein einer singulären, doppelten Wurzel anzeigt, so kann, analog der bei der Theorie der Resultante gefundenen, zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Wurzeln führenden Proportionalität der Differentiale der Resultante, aus der Discriminante der Form ebenso die Bestimmung dieser singulären Wurzel hergeleitet werden.

Wenn die Gleichung n^{ten} Grades

$$u = 0, \quad \text{oder} \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots = 0$$

in

$$\frac{x}{y} = \alpha$$

eine doppelte Wurzel hat, so genügt dieselbe ebenso der Gleichung

$$(a_0 + k A_0) x^n + (a_1 + k A_1) x^{n-1} y + \ldots = 0,$$

wenn nur die Bedingung

---

*) Die Discriminante der biquadratischen Form, das

$$(J_{4,2}^3 - 27 J_{4,3}^2)$$

der Entwickelung der Gleichung der Differenzenquadrate, zeigt eben in dieser Zusammensetzung deutlich das Gesetz, da die Glieder von $J_{4,2}$ und $J_{4,3}$ respective die Gewichte 4 und 6 haben.

$$A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + A_2\alpha^{n-2} + \ldots = 0, \text{ oder } v = 0$$

von den Coefficienten $A_0, A_1, \ldots$ erfüllt wird.

Die Discriminante von

$$u + kv = 0$$

ist aber durch k^2 theilbar, denn man kann setzen

$$u + kv = (x - \alpha y)\{\varphi(x,y)_\alpha + k\psi(x,y)_\alpha\},$$

und nach dem Satze, dass die Discriminante des Products zweier Formen die Resultante dieser Formen und ihre beiden Discriminanten zu Factoren hat, enthält die Discriminante von $(u+kv)$ den Factor

$$\{\varphi(\alpha) + k\psi(\alpha)\}^2$$

und ist wegen

$$\varphi(\alpha) = 0$$

somit durch k^2 theilbar.

Bezeichnet man aber durch D die Discriminante von

$$u = 0$$

und durch D^* die Discriminante von

$$u + kv = 0,$$

so muss jene in diese übergehen, wenn man

$$a_0, a_1, \ldots$$

respective durch

$$a_0 + kA_0, \; a_1 + kA_1, \ldots$$

ersetzt, so dass man nach dem Taylor'schen Satze hat

$$D^* = D + k\left(A_0\frac{dD}{da_0} + A_1\frac{dD}{da_1} + A_2\frac{dD}{da_2} + \ldots\right) + k^2(\ldots) \text{ etc.}$$

Wegen der Existenz der singulären Wurzel ist aber

$$D = 0$$

und nach der eben bewiesenen Theilbarkeit der Discriminante D^* durch k^2 muss auch der Coefficient von k in dieser Entwickelung verschwinden, d. h. man hat zwischen den Grössen $A_0, A_1, \ldots$ die Relation

$$A_0\frac{dD}{da_0} + A_1\frac{dD}{da_1} + \ldots = 0;$$

durch Vergleichung derselben mit der ursprünglichen

$$A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \ldots = 0$$

entspringt sogleich das Gesetz

$$\alpha^n : \alpha^{n-1} : \alpha^{n-2} : \text{etc.} = \frac{dD}{da_0} : \frac{dD}{da_1} : \frac{dD}{da_2} : \text{etc.},$$

welches in Rücksicht darauf, dass

$$\alpha^n, \alpha^{n-1}, \text{ etc.}$$

die Werthe der nach

$$a_0, a_1, \text{ etc.}$$

genommenen partiellen Differentiale der ursprünglichen — etwa mit y^n dividierten — Form für die singuläre Wurzel α sind, sich so aussprechen lässt: Für den Werth einer singulären Wurzel sind die Differentiale der gegebenen Form nach ihren Coefficienten proportional den Differentialen ihrer Discriminante nach denselben Coefficienten, oder

$$\left(\frac{du}{da_0}\right)_\alpha : \left(\frac{du}{da_1}\right)_\alpha : \text{etc.} = \frac{dD}{da_0} : \frac{dD}{da_1} : \text{etc.}$$

Nach G. Salmon's Bemerkung kann diese Proportionalität auch erwiesen werden, indem man die symmetrischen Functionen der Wurzeln bildet, welche den Differentialen der Discriminante entsprechen. Man bildet nach Analogie der Gleichung

$$\frac{dD}{d\alpha_1} = \frac{dD}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha_1} + \frac{dD}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha_2} + \cdots$$

n Gleichungen und kann, da D, a_1, a_2 etc. sämmtlich in Function der Wurzeln der Gleichung bekannt sind, die Grössen

$$\frac{dD}{da_1}, \frac{dD}{da_2}, \text{ etc.}$$

finden. Man hat beispielsweise

$$\frac{dD}{da_n} = \Sigma(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4) + (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\},$$

$$\frac{dD}{da_{n-1}} = \Sigma\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4) + (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\},$$

$$\frac{dD}{da_{n-2}} = \Sigma\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4) + (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\},$$

etc.

und erkennt darin das allgemeine Bildungsgesetz sehr leicht. Das Product der Quadrate aller α_1 nicht enthaltenden Wurzeldifferenzen ist multipliciert mit der Summe der Producte aller Differenzen zwischen α_1 und $(n-2)$ der übrigen Wurzeln.

Unter der Voraussetzung einer doppelten Wurzel, z. B. für $\alpha_1 = \alpha_2$, verschwinden alle Glieder der Summe, dasjenige

ausgenommen, in dessen quadratischen Factoren α_1 nicht enthalten ist, d. h. die den einzelnen Differentialquotienten entsprechenden Sunmen reducieren sich auf Glieder, welche in den durch die Grössen

$$1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots$$

bestimmten Verhältnissen zu einander stehen.

Wenn es sich um eine drei- oder mehrfache Wurzel handelt, so führen noch immer analoge Betrachtungen zum Ziele, nur muss man wegen des identischen Verschwindens aller ersten Differentiale der Discriminante von den zweiten Differentialen derselben ausgehen.*)

Diese Betrachtungen, welche sich an die besondere Natur der Discriminante als einer Resultante anschliessen, lassen sich eben deshalb nicht vollständig und direct auf die Invarianten und Covarianten überhaupt übertragen; aber es entspringt aus der Zurückleitung derselben auf die analogen Gesetze in der Theorie der symmetrischen Functionen und der engen Verbindung, welche im Art. 17 zwischen den symmetrischen Functionen und den Invarianten und Covarianten nachgewiesen worden ist, die Erwartung, dass in Bezug auf den Character solcher allgemeinen Gesetze die Discriminante zugleich ein, wenn auch specielles, Beispiel der umfassenden für alle Invarianten und Covarianten gültigen Theorie sein werde.

In der That bedarf es nur der Wiederholung eines ganz ähnlichen Raisonnements, wie es in Art. 7 zur Begründung des Gesetzes über das Gewicht der Glieder einer symmetrischen Function führte, um den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen.

Wenn n der Grad einer gegebenen Function und ν der Grad einer Invariante derselben in den Coefficienten ist, so ist das Gewicht jedes Gliedes der Invariante constant und

*) Ueber den Zusammenhang dieser Betrachtungen mit der Theorie der Resultante und die Bestimmung gemeinschaftlicher Wurzeln zweier Gleichungen, wenn dieselben in Mehrzahl vorhanden sind, sehe man: G. Salmon's „Lessons introductory to the modern higher Algebra", Art. 70, 47. Ich darf vielleicht auf meine demnächst erscheinende deutsche Ausgabe verweisen.

$$= \frac{n\nu}{2}.$$

Wenn n der Grad einer gegebenen Form und n' der Grad einer Covariante derselben in den Veränderlichen, ν aber überdiess der Grad dieser Covariante in den Coefficienten der Form ist, so ist das Gewicht jedes Gliedes derselben, d. h. die Summe der Indices seiner Coefficienten mit dem ihm zugehörigen Exponenten der Unbekannten $\frac{x}{y}$, constant und

$$= \frac{n\nu + n'}{2}.$$

Denn eine Invariante muss ihrem Wesen nach ungeändert bleiben, wenn man x in ϱx transformiert und y ungeändert lässt, — welches einer linearen Substitution von der Determinante ϱ entspricht; damit diess aber der Fall sei, ist aus denselben Gründen, wie in Art. 7 nothwendig, dass die Summe der Indices in jedem ihrer Glieder dieselbe ist. Den Betrag dieser Summe bestimmt man sodann durch die analoge Ueberlegung für die Substitution von der Determinante -1, bei welcher x und y respective in y und x übergeführt werden; denn die Wirkung dieser Substitution ist ganz dieselbe, als wenn man für jeden Coefficienten a_i den vom andern Ende der geordneten Form gleich entfernten a_{n-i} substituierte. Darin liegt die Begründung der Relation

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots = n - i_1 + n - i_2 + n - i_3 + \dots,$$

d. i.

$$2(i_1 + i_2 + i_3 + \dots) = n\nu,$$

womit der Satz, soweit er sich auf Invarianten bezieht, bewiesen ist.

Man erkennt daraus, dass das Product des Grades der Form und des Grades der Invariante stets durch 2 theilbar ist, dass also z. B. keine Form von ungeradem Grade eine Invariante von ungeradem Grade haben kann.

Das Gesetz erlaubt aber, ganz wie das analoge von dem Gewichte einer Resultante oder einer symmetrischen Function, den litteralen Theil der Invariante einer

beliebigen gegebenen Form zu bestimmen, wenn nur die Ordnung der Invariante in den Coefficienten bekannt ist.

Die quadratische Invariante der quadratischen Form muss als vom Gewicht 2 die allgemeine Form

$$A a_0 a_2 + B a_1^2$$

haben; der cubischen Invariante der biquadratischen Form und der biquadratischen Invariante der cubischen Form, die beide vom Gewicht 6 sind, entsprechen die Ausdrücke

$$A a_0 a_2 a_4 + B a_0 a_3^2 + C a_1^2 a_4 + D a_1 a_2 a_3 + E a_2^3,$$
$$A a_0^2 a_3^2 + B a_0 a_2^3 + C a_0 a_1 a_2 a_3 + D a_1^3 a_3 + E a_1^2 a_2^2$$

respective, etc. Nur die Bestimmung der numerischen Factoren A, B, C, ... bleibt zu leisten übrig.

Was Covarianten betrifft, so müssen sie nach den Relationen zwischen Wurzeln und Coëfficienten einer binären Form ungeändert bleiben, wenn x in ϱx und jeder Coefficient der gegebenen Form a_i in $\varrho^i a_i$ verändert wird; ist somit

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots x^{\mu} y^{n'-\mu}$$

ein Glied der Covariante, so muss die Summe

$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + \mu$$

bei allen Gliedern dieselbe sein. Und da die Substitution von x, y für y, x die Covariante ebenso wenig ändern darf, so gilt wieder wie vorher die Relation

$$i_1 + i_2 + \ldots + \mu = (n' - \mu) + n - i_1 + n - i_2 + \ldots,$$

d. i.

$$2(\mu + i_1 + i_2 + \ldots) = n' + \nu n,$$

welche der Satz ausspricht.

Man schliesst aus demselben, dass der Grad der Covariante in den Veränderlichen n' und das Product ihres Grades in den Coefficienten in den Grad der gegebenen Form $n\nu$ stets zugleich gerade oder ungerade sein müssen.

Das Gesetz bestimmt vollständig die litterale Form einer Covariante, wenn man ihren Grad in den Veränderlichen und Coefficienten und den Grad der Originalform als bekannt voraussetzt.

Soll man z. B. die Covariante einer biquadratischen Form bilden, welche in den Coefficienten vom zweiten und in den Veränderlichen vom vierten Grade ist, so hat sie die Form

$$(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \between x, y)^4;$$

die einzelnen Coefficienten sind quadratische Formen der Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 der gegebenen Form, und ihr litteraler Ausdruck ist nach dem Gesetze vollständig bestimmt. Das Gewicht eines jeden Gliedes der Covariante ist

$$= \frac{4+2.4}{2} = 6;$$

der Coefficient von x^4 ist daher vom Gewicht 2 in den Coefficienten der Form, also sein allgemeiner Ausdruck

$$A a_0 a_2 + B a_1^2;$$

der Coefficient von y^4 ist dagegen vom Gewicht 6 und also

$$C a_2 a_4 + D a_3^2.$$

Für die Coefficienten von $x^3 y$ und $x y^3$ hat man die Gewichte 3 und 5 respective und die Formen

$$E a_0 a_3 + F a_1 a_2, \quad G a_1 a_4 + H a_2 a_3.$$

Endlich ist für den Coefficienten von $x^2 y^2$ das Gewicht $= 4$ und seine Form

$$I a_0 a_4 + K a_1 a_3 + L a_2^2.$$

Man findet gleicherweise für die drei Glieder der in den Coefficienten wie in den Veränderlichen quadratischen Covariante der Form des siebenten Grades die Zahlen 6, 7 und 8 für die respectiven Gewichte der Glieder in den Coefficienten und daher die allgemeine Form derselben wie folgt:

$$A a_0 a_6 + B a_1 a_5 + C a_2 a_4 + D a_3^2, \quad E a_1 a_7 + F a_2 a_6 + G a_3 a_5 + H a_4^2,$$
$$I a_0 a_7 + K a_1 a_6 + L a_2 a_5 + M a_3 a_4.$$

Wie sich alles diess an früheren Entwickelungen leicht bestätigt.

Endlich leiten aber Betrachtungen derselben Art auch zur Bestimmung der numerischen Factoren $A, B, C, \ldots$, welche in die so gewonnenen Ausdrücke eingehen. Mit der Erkenntniss der bezüglichen Gesetze hat man in dem Gebiete der Covarianten und Invarianten das vollständig wiedergewonnen, was in den früheren Artikeln von den symmetrischen Functionen überhaupt nachgewiesen worden ist.

Wie dort, so ergeben sich auch hier diese allgemeinen Gesetze in der Form von partiellen Differentialgleichungen.

Eine Invariante kann als Function der Coefficienten sich nicht ändern, wenn x in $x + ky$ transformiert wird, während y ungeändert bleibt, eine Substitution, welcher der Modulus Eins entspricht. Dabei geht die binäre Form

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots$$

in die andere

$$a_0 x^n + n(a_1 + k a_0) x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2}(a_2 + 2 k a_1 + k^2 a_0) x^{n-2} y^2 + \ldots$$

über, und man erhält also die Invariante der transformierten Form aus der der ursprünglichen, wenn man

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots$$

respective durch

$$a_1 + k a_0; \; a_2 + 2 k a_1 + k^2 a_0, \; a_3 + 3 k a_2 + 2 k^2 a_1 + k^3 a_0, \; \ldots$$

ersetzt; bei dieser Substitution müssen nothwendig die verschiedenen Potenzen von k verschwinden, wenn der Invariantencharacter bestätigt sein soll. Die Betrachtung des Coefficienten von k liefert die nothwendige Bedingung

$$a_0 \frac{dJ}{da_1} + 2a_1 \frac{dJ}{da_2} + 3a_2 \frac{dJ}{da_3} + \ldots + n a_{n-1} \frac{dJ}{da_n} = 0$$

oder

$$\sum_0^n{}_i \, i \, a_{i-1} \frac{dJ}{da_i} = 0,$$

wenn man nach dem Taylor'schen Satze, wie schon früher, die transformierte Form J^* aus der ursprünglichen J ableitet.

Ebenso liefert die Transformation von y in $(y + k'x)$ bei unverändertem x wiederum aus dem Coefficienten von k die zweite nothwendige Bedingungsgleichung

$$n a_1 \frac{dJ}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{dJ}{da_1} + (n-2) a_3 \frac{dJ}{da_2} + \ldots + a_n \frac{dJ}{da_{n-1}} = 0,$$

oder

$$\sum_0^n{}_i \, i \, a_{n-i+1} \frac{dJ}{da_{n-i}} = 0.$$

Da das so bedingte Verschwinden der Coefficienten von k, k' das gleichzeitige Verschwinden der Coefficienten aller höheren Potenzen dieser unbestimmten Grössen nach sich zieht, so sind diese Bedingungsgleichungen nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend für die Characteristik der Invariante. Man bemerkt überdiess, dass die eine von ihnen aus der anderen entspringt, indem man einfach a_i mit a_{n-i} vertauscht; was erfordert, dass die Invariante in Bezug auf die gleichen Potenzen von x und y symmetrisch gebildet sei, oder selbst die Vertauschung von a_i mit a_{n-i} gestatte. Schon das Gesetz über das Gewicht der einzelnen

Glieder erfüllt diese Bedingung; mit diesem Gesetz genügt also eine der beiden partiellen Differentialgleichungen zur Characteristik der Invarianten.

In ähnlicher Weise lassen sich Differentialgleichungen entwickeln, denen jede Covariante nothwendig genügen muss. Denn nach dem Begriff der Covariante muss die Transformation von x in $(x+ky)$ bei ungeändertem y das nämliche Resultat liefern, ob sie in der Covariante vollzogen wird, oder ob in der Originalform, um erst darnach aus dieser die betreffende Covariante zu bilden.

Ist

$$c_0 x^{n'} + n' c_1 x^{n'-1} y + \frac{n'(n'-1)}{1.2} c_2 x^{n'-2} y^2 + \dots$$

die gedachte Covariante, und

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

die Originalform, so liefert der Ausdruck der Aequivalenz beider bezeichneter Transformationsergebnisse aus der Covariante unter der Bemerkung, dass in Folge derselben in der Covariante das eine mal x in $(x+ky)$, das andere mal $a_1, a_2, \dots$ respective in (a_1+ka_0), $(a_2+2ka_1+k^2a_0)$, ... übergeführt werden, die folgenden Bedingungsgleichungen

$$(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots) c_0 = 0,$$

$$(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots) c_1 = c_0$$

$$(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots) c_2 = 2c_1$$

$$\vdots$$

$$(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots) c_i = i c_{i-1}.$$

Die andere analoge Transformation liefert die ganz gleichwerthigen Bedingungsgleichungen

$$\left[n a_1 \frac{d}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d}{da_1} + (n-2) a_3 \frac{d}{da_2} + \dots + a_n \frac{d}{da_{n-1}}\right] c_0 = 0,$$

$$\left[na_1\frac{d}{da_0}+(n-1)a_2\frac{d}{da_1}+(n-2)a_3\frac{d}{da_3}+\ldots+a_n\frac{d}{da_{n-1}}\right]c_1=c_2,$$

$$\left[na_1\frac{d}{da_0}+\ldots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]c_2=2c_3,$$

etc.,
welchen jede Covariante ebenfalls genügt.

Man erkennt sofort, wie diese Differentialgleichungen zur Bestimmung der in den Ausdruck einer Covariante eingehenden numerischen Coefficienten ganz geeignet sind, welche allein noch durch die vorigen Gesetze unbestimmt gelassen waren. Damit ist die Entwickelung covarianter Functionen ganz analog der Entwickelung symmetrischer Functionen vollendet, welche in Art. 7 gegeben ist.

Für die oben geschriebenen Ausdrücke der quadratischen, cubischen und biquadratischen Invariante der quadratischen, biquadratischen und cubischen Form respective

$$Aa_0a_2+Ba_1^2,$$
$$Aa_0a_2a_4+Ba_0a_3^2+Ca_1^2a_4+Da_1a_2a_3+Ea_2^3,$$
$$Aa_0^2a_3^2+Ba_0a_2^3+Ca_0a_1a_2a_3+Da_1^3a_3+Ea_1^2a_2^2$$

liefert die Differentialgleichung der Invarianten

$$a_0\frac{dJ}{da_1}+2a_1\frac{dJ}{da_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{dJ}{da_n}=0$$

respective die Gleichungen

$$2Ba_0a_1+2Aa_0a_1=0,$$
$$a_0(2Ca_1a_4+Da_2a_3)+2a_1(Aa_0a_4+Da_1a_3+3Ea_2^2)+3a_2(2Ba_0a_3$$
$$+Da_1a_2)+4a_3(Aa_0a_2+Ca_1^2)=0,$$
$$a_0(Ca_0a_2a_3+3Da_1^2a_3+2Ea_1a_2^2)+2a_1(3Ba_0a_2^2+Ca_0a_1a_3+2Ea_1^2a_2)$$
$$+3a_2(2Aa_0^2a_3+Ca_0a_1a_2+Da_1^3)=0;$$

aus ihnen entspringen die Bedingungsgleichungen unter den Coefficienten und unter der Voraussetzung

$$A=+1$$

die Werthe derselben wie folgt;

$$B+A=0,\ \text{d. i.}\ A=+1,\ B=-1$$

oder die quadratische Invariante der quadratischen Form

$$a_0a_2-a_1^2;$$
$$2C+2A=0,\quad D+6B+4A=0,$$
$$2D+4C=0,\quad 6C+3D=0,\ \text{d. i.}$$
$$A=+1,\ B=-1,\ C=-1,\ D=+2,\ E=-1,$$

oder die cubische Invariante der biquadratischen Form

$$a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3;$$
$$C + 6A = 0, \quad 3D + 2C = 0, \quad 2E + 6B + 3C = 0,$$
$$4E + 3D = 0, \text{ d. i.}$$
$$A = +1, \quad C = -6, \quad D = +4, \quad E = -3, \quad B = +4,$$

oder die biquadratische Invariante der cubischen Form

$$a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2,$$

welche als ihre Discriminante schon gefunden ist (p. 168).

Ebenso aber hätte die andere die Differentialgleichung

$$n a_1 \frac{dJ}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{dJ}{da_1} + \dots + a_n \frac{dJ}{da_{n-1}} = 0$$

die nöthigen Bedingungsgleichungen und durch sie dieselben Werthe geliefert.

Als ein anderes Beispiel kann die Entwickelung der quadratischen Invariante einer Form

$$(a_0, a_1, a_2, \dots a_n \between x, y)^n, \quad (n = 2k)$$

dienen, deren Existenz früher bewiesen wurde und von welcher in speciellen Fällen mehrfache Anwendungen schon gemacht worden sind. Das Gewicht eines jeden Gliedes derselben ist dem Grade der Form gleich und ihr litteraler Ausdruck daher

$$A_0 a_n + A_1 a_1 a_{n-1} + A_2 a_2 a_{n-2} + \dots + A_{\frac{n}{2}} \cdot a_{\frac{n}{2}}^2.$$

Die Differentialgleichungen der Invarianten liefern, mit der Voraussetzung $A_0 = 1$, zur Bestimmung der numerischen Coefficienten $A_0, A_1, \dots, A_{\frac{n}{2}}$ in demselben die Bedingungen

$$A_1 a_0 a_{n-1} + 2 A_1 a_1 a_{n-2} + 3 A_3 a_2 a_{n-3} + \dots + n a_{n-1} a_0 = 0,$$
$$n a_1 a_n + (n-1) A_1 a_2 a_{n-1} + (n-2) A_2 a_3 a_{n-2} + \dots + A_1 n A_1 a_n a_0 = 0,$$

aus denen gleichmässig hervorgeht

$$A_1 + n = 0, \quad 2A_2 + (n-1) A_1 = 0,$$
$$3A_3 + (n-2) A_2 = 0, \quad 4A_4 + (n-3) A_3 = 0, \text{ etc.,}$$

so dass man erhält

$$A_1 = -n, \quad A_2 = -\frac{n-1}{2} A_1 = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$A_3 = -\frac{n-2}{3} A_2 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3},$$
$$A_4 = -\frac{n-3}{4} A_3 = \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ etc.,}$$

allgemein

$$A_i = (-1)^i \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \text{ und}$$
$$A_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)\dots(\frac{n}{2}+1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{n}{2}}.$$

Man hat somit die schon angegebene allgemeine Form und für $n=2$, $n=4$, $n=6$, $n=8$ respective die schon früher gebrauchten speciellen Formen dieser quadratischen Invariante hier auf Grund der allgemeinen Theorie wieder gefunden.

Anderseits mögen die erlangten Differentialgleichungen der Covarianten auf die vorher in ihrer litteralen Form aufgestellten Covarianten angewendet werden.

Die erste derselben war die in den Coefficienten quadratische in den Veränderlichen biquadratische Covariante der Form vierten Grades

$$(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \between x, y)^4,$$

wo

$$\begin{aligned} c_0 &= A a_0 a_2 + B a_1^2, \\ 4c_1 &= E a_0 a_3 + F a_1 a_2, \\ 6c_2 &= I a_0 a_4 + K a_1 a_3 + L a_2^2, \\ 4c_3 &= G a_1 a_4 + H a_2 a_3, \\ c_4 &= C a_2 a_4 + D a_3^2 \end{aligned}$$

sind und für welche man daher hat

$$\begin{aligned} &2 B a_0 a_1 + 2 A a_0 a_1 = 0, \\ &F a_0 a_2 + 2 F a_1^2 + 3 E a_0 a_2 = 4 (A a_0 a_2 + B a_1^2), \\ &K a_0 a_3 + 4 L a_1 a_2 + 3 K a_1 a_2 + 4 I a_0 a_3 = 3 (E a_0 a_3 + F a_1 a_2), \\ &G a_0 a_4 + 2 H a_1 a_3 + 3 H a_2^2 + 4 G a_1 a_3 = 2 (I a_0 a_4 + K a_1 a_3 + L a_2^2), \\ &2 C a_1 a_4 + 6 D a_2 a_3 + 4 C a_2 a_3 = G a_1 a_4 + H a_2 a_3; \end{aligned}$$

also

$$\begin{gathered} A + B = 0,\ 3E + F = 4,\ F = -2, \\ K + 4I = 3E,\ 3K + 4L = 3F,\ G = 2I, \\ 4G + 2H = 2K,\ 3H = 2L,\ 2C = G, \\ 4C + 6D = H, \end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered} A = +1,\ B = -1,\ C = +1,\ D = -1, \\ E = +2,\ F = -2,\ G = +2,\ H = -2, \\ I = +1,\ K = +2,\ L = -3, \end{gathered}$$

so dass jene Covariante die Gestalt annimmt

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 y + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x^2 y^2 \\ + 2 (a_1 a_4 - a_2 a_3) x y^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) y^4,$$

wie sie schon bekannt ist. (Man sehe Art. 18 p. 153.)

Die zweite, die quadratische Covariante der Form des siebenten Grades

$$(c_0, c_1, c_2 \between x, y)^2,$$

als für welche

$$\begin{aligned} c_0 &= A a_0 a_6 + B a_1 a_5 + C a_2 a_4 + D a_3^2, \\ 2 c_1 &= I a_0 a_7 + K a_1 a_6 + L a_2 a_5 + M a_3 a_4, \\ c_2 &= E a_1 a_7 + F a_2 a_6 + G a_3 a_5 + H a_4^2. \end{aligned}$$

sind, liefert die Bedingungsgleichungen

$$Ba_0a_5 + 2Ca_1a_4 + 6Da_2a_3 + 4Ca_2a_3 + 5Ba_1a_4 + 6Aa_0a_5 = 0,$$
$$Ka_0a_6 + 2La_1a_5 + 3Ma_2a_4 + 4Ma_3^2 + 5La_2a_4 + 6Ka_1a_5 + 7Ia_0a_6$$
$$= 2Aa_0a_6 + 2Ba_1a_5 + 2Ca_2a_4 + 2Da_3^2,$$
$$Ea_0a_7 + 2Fa_1a_6 + 3Ga_2a_5 + 8Ha_3a_4 + 5Ga_2a_4 + 6Fa_5^2 + 7Ea_1a_6$$
$$= Ia_0a_7 + Ka_1a_6 + La_2a_5 + Ma_3a_4,$$

woraus

$$6A + B = 0,\quad 5B + 2C = 0,\quad 4C + 6D = 0,\quad 7I + K = 2A,$$
$$6K + 2L = 2B,\quad 5L + 3M = 2C,\quad 2D = 4M,\quad E = I,$$
$$7E + 2F = K,\quad 6F + 3G = L,\quad 5G + 8H = M$$

folgen und

$$A = +1,\quad B = -6,\quad C = +15,\quad D = -10,$$
$$E = +1,\quad F = -6,\quad G = +15,\quad H = -10,$$
$$I = +1,\quad K = -5,\quad L = +\ 9,\quad M = -\ 5$$

sich ergeben, so dass die entwickelte Covariante ist

$$(a_0a_6 - 6a_1a_5 + 15a_2a_4 - 10a_3^2)x^2 + (a_0a_7 - 5a_1a_6 + 9a_2a_5 - 5a_3a_4)xy$$
$$+ (a_1a_7 - 6a_2a_6 + 15a_3a_5 - 10a_4^2)y^2.$$

21.

Nach diesen Beispielen ihrer Anwendung kann etwas weiter in die Natur dieser wichtigen Gesetze eingegangen werden.

Man hat die Operation

$$a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{d}{da_n}$$

und die andere, gewissermassen complementäre,

$$na_1\frac{d}{da_0} + (n-1)a_2\frac{d}{da_1} + (n-2)a_3\frac{d}{da_2} + \ldots + a_n\frac{d}{da_{n-1}}$$

als für die vorhergehenden Entwickelungen characteristisch erkannt; sie mögen deshalb abkürzend durch die Symbole

$$\vartheta \text{ und } \vartheta^*$$

respective bezeichnet werden, welche der Function von $a_0, a_1, \ldots$ vorgesetzt werden, an welcher man sie vollzieht.

Mit dieser Bezeichnung werden die characteristischen Differentialgleichungen der Invariante einfach

$$\vartheta J = 0,\quad \vartheta^* J = 0,$$

und die, welcher die Coefficienten c_i jeder Covariante genügen müssen,

$$\vartheta c_i = i c_{i-1},$$
$$\vartheta^* c_i = (n-i)c_{i+1}.$$

Mit dieser so sehr vereinfachenden Bezeichnung liefert zunächst die Differentialgleichung, welcher ein beliebiger Coefficient c_i der Covariante genügen muss,

$$\vartheta^* c_i = (n-i)\, c_{i+1}$$

für

$$i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

die Reihe der speciellen Relationen

$$c_1 = \frac{1}{n}\, \vartheta^* c_0,$$

$$c_2 = \frac{1}{n-1}\, \vartheta^* c_1,$$

$$c_3 = \frac{1}{n-2}\, \vartheta^* c_2,$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$c_n = \vartheta^* c_{n-1}.$$

Man sieht daraus, dass alle folgenden Coefficienten der Covariante aus ihrem ersten Coefficienten auf einfache und gleichförmige Weise hervorgehen, so dass sich in der That die Untersuchung einer Covariante auf die Untersuchung des Coefficienten ihres ersten Gliedes — ihre geordnete Gestalt vorausgesetzt — reduciert.

Die cubische Covariante der cubischen Form

$$(c_0, c_1, c_2, c_3 \between x, y)^3,$$

in welcher der erste Coefficient c_0 das Gewicht 3 und folglich die litterale Form

$$a_0^2 a_3 + A\, a_0 a_1 a_2 + B\, a_1^3$$

hat, dessen numerische Coefficienten A und B sich also nach der Differentialgleichung

$$\vartheta c_0 = 0$$

oder

$$a_0 (A\, a_0 a_2 + 3 B\, a_1^2) + 2 A\, a_0 a_1^2 + 3 a_0^2 a_2 = 0,$$

d. i. durch die Bedingungen

$$A + 3 = 0, \quad 3B + 2A = 1$$

zu

$$A = -3, \quad B = +2$$

bestimmen, lässt aus diesem ersten

$$c_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$$

die übrigen Coefficienten bestimmen, wie folgt:

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{1}{3} \{3 a_1 (2 a_0 a_3 - 3 a_1 a_2) + 2 a_2 (6 a_1^2 - 3 a_0 a_2) - 3 a_0 a_1 a_3\} \\ &= a_0 a_1 a_3 + a_1^2 a_2 - 2 a_0 a_2^2; \\ c_2 &= \tfrac{1}{3} \{3 a_1 (a_1 a_3 - 2 a_2^2) + 2 a_2 (a_0 a_3 + 2 a_1 a_2) + a_3 (a_1^2 - 4 a_0 a_2)\} \\ &= 2 a_1^2 a_3 - a_1 a_2^2 - a_0 a_2 a_3; \\ c_3 &= -3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2 (4 a_1 a_3 - a_2^2) - a_3 (2 a_1 a_2 + a_0 a_3) \\ &= 3 a_1 a_2 a_3 - 2 a_2^3 - a_0 a_3^2. \end{aligned}$$

Man sieht dabei auch, dass c_2 aus c_1 und nicht minder c_3 aus c_0 hervorgeht, indem man die Indices 0, 1, 2, 3 respective durch 3, 2, 1, 0 ersetzt und die Vorzeichen zugleich in die entgegengesetzten verwandelt; und erkennt leicht, dass das analoge Gesetz allgemein für die von den Endgliedern durch gleichviele Glieder getrennten Glieder jeder Covariante gelten muss.

Diess ist der Sinn, in welchem man von einem leitenden Gliede jeder Covariante sprechen und sie durch dasselbe characterisieren kann. Der Coefficient dieses leitenden Gliedes ist eine Invariante der Form, d. h. eine symmetrische Function ihrer Wurzeln, woraus abermals die durchgreifende Bedeutung der symmetrischen Functionen für diese ganze Theorie deutlich begründet erscheint.

Bezeichnet man nun ferner durch C eine beliebige Covariante der Form u mit den Coefficienten $c_0, c_1, \ldots$, welche Functionen der Coefficienten der Form $a_0, a_1, \ldots$ sind, so kann man schreiben

$$\frac{dC}{da_i} = \frac{dC}{dc_0} \frac{dc_0}{da_i} + \frac{dC}{dc_1} \frac{dc_1}{da_i} + \ldots + \frac{dC}{dc_j} \frac{dc_j}{da_i},$$

und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta C &= \left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2 a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + n a_{n-1} \frac{d}{da_n}\right) C \\ &= \Sigma_i{}_0^n \frac{dC}{dc} \cdot \vartheta c_i, \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \vartheta^* C &= \left[n a_1 \frac{d}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d}{da_1} + \ldots + a_n \frac{d}{da_{n-1}}\right] C \\ &= \Sigma_i{}_0^n \frac{dC}{dc_i} \cdot \vartheta^* c_i. \end{aligned}$$

Da nun aber

$$\frac{dC}{dc_i} = \frac{n(n-1) \ldots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} x^{n-i} y^i$$

ist, so entspringen aus den vorigen Differentialgleichungen der Coefficienten der Covariante die auf die Covariante selbst bezüglichen

$$\vartheta C = \sum_0^n {}_i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)} c_{i-1} x^{n-i} y^i,$$

$$\vartheta^* C = \sum_0^n {}_i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} c_{i+1} x^{n-i} y^i,$$

d. i.

$$\vartheta C = y \frac{dC}{dx}, \quad \vartheta^* C = x \frac{dC}{dy}.$$

Man erhält aus ihnen die Differentialgleichungen der Invarianten

$$\vartheta J = 0, \quad \vartheta^* J = 0$$

wieder, als die von Functionen der Coefficienten allein, deren Differentiale nach x und y somit identisch verschwinden.

Diess sind die Differentialgleichungen der Covarianten, welche Cayley im 47. Bande des Journals von Crelle zuerst gegeben und auf deren Existenz er später den Ausbau der Theorie der Invarianten und Covarianten gegründet hat, der in seinen „Memoirs upon Quantics"*) vorliegt.

Man kann ohne Schwierigkeit zeigen, dass jede Function vom entsprechenden Grade in den Veränderlichen und Coefficienten, welche den Differentialgleichungen der Covariante genügt, selbst eine Covariante sein muss, so dass diese Gleichungen ebenso hinreichend als nothwendig zur Characteristik der Covarianten sind.**)

Ist durch φ eine Function der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ und der Veränderlichen x, y einer Form u bezeichnet, welche jenen Differentialgleichungen genügt, so nenne man Φ die Function der Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$, und der Veränderlichen X, Y, welche durch die lineare Substitution

$$x = \beta X + \gamma Y, \quad y = \beta' X + \gamma' Y$$

---

*) Die „Memoirs upon Quantics" sind enthalten in den „Philosophical Transactions" 1854—1859; und zwar Vol. 144, p. 245—258; Vol. 146, p. 101—126; Vol. 146, p. 627—647; Vol. 148, p. 415—460; Vol. 149, p. 61—90.

**) Vergl. Brioschi, „Annali di Matemat. da Tortolini", t. I, (1858.)

daraus hervorgeht, und man hat

$$\sum_0^n i A_{i-1} \frac{d\Phi}{dA_i} = Y \frac{d\Phi}{dX},$$

$$\sum_0^n (n-i) A_{i+1} \frac{d\Phi}{dA_i} = X \frac{d\Phi}{dY}.$$

Da aber $A_0, A_1, \ldots$ die Coefficienten sind, welche die ursprüngliche Form u durch die Transformation erhält, so erhält man wie in Artikel 18 und nach dem Taylor'schen Satze allgemein

$$A_i = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-i+1)} \left(\gamma \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma' \frac{d\varphi}{d\beta'}\right)^i$$

oder auch

$$A_i = \frac{1}{n(n-1)\ldots(i+1)} \left(\beta \frac{d\varphi}{d\gamma} + \beta' \frac{d\varphi}{d\gamma'}\right)^{n-i}.$$

Wenn man durch Θ und Θ' die Operationen

$$\gamma \frac{d}{d\beta} + \gamma' \frac{d}{d\beta'} \quad \text{und} \quad \beta \frac{d}{d\gamma} + \beta' \frac{d}{d\gamma'}$$

symbolisch bezeichnet, so ist

$$\Theta(A_i) = i A_{i+1} \quad \text{und} \quad \Theta'(A_i) = (n-i) A_{i+1}.$$

Aus den Relationen

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma) X = \gamma' x - \beta' y, \quad (\beta\gamma' - \beta'\gamma) Y = \beta y - \gamma x$$

folgt

$$\Theta(X) = -Y, \quad \Theta'(X) = 0,$$
$$\Theta(Y) = 0, \quad \Theta'(Y) = -X.$$

Bezeichnen sodann

$$\left(\frac{d\Phi}{d\beta}\right), \quad \left(\frac{d\Phi}{d\gamma}\right), \quad \left(\frac{d\Phi}{d\beta'}\right), \quad \left(\frac{d\Phi}{d\gamma'}\right)$$

die Derivierten von Φ nach $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, so hat man

$$\beta \left(\frac{d\Phi}{d\gamma}\right) + \beta' \left(\frac{d\Phi}{d\gamma'}\right) = -Y \frac{d\Phi}{dX},$$

$$\gamma \left(\frac{d\Phi}{d\beta}\right) + \gamma' \left(\frac{d\Phi}{d\beta'}\right) = -X \frac{d\Phi}{dY},$$

so dass wegen

$$\Theta(A_i) = i A_{i+1}, \quad \Theta'(A_i) = (n-i) A_{i+1}$$

die vorausgesetzten Gleichungen

$$\sum_0^n i A_{i-1} \frac{d\Phi}{dA_i} = Y \frac{d\Phi}{dX}, \quad \sum_0^n (n-i) A_{i+1} \frac{d\Phi}{dA_i} = X \frac{d\Phi}{dY}$$

in die neuen

$$\beta\left[\sum_0^n{}_i \frac{d\Phi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\gamma}+\left(\frac{d\Phi}{d\gamma}\right)\right]+\beta'\left[\sum_0^n{}_i \frac{d\Phi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\gamma'}+\left(\frac{d\Phi}{d\gamma'}\right)\right]=0,$$

$$\gamma\left[\sum_0^n{}_i \frac{d\Phi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\beta}+\left(\frac{d\Phi}{d\beta}\right)\right]+\gamma'\left[\sum_0^n{}_i \frac{d\Phi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\beta'}+\left(\frac{d\Phi}{d\beta'}\right)\right]=0$$

übergehen. Nun sind

$$\Theta(\Phi)=0,\quad \Theta'(\Phi)=0$$

und aus

$$\Theta\,.\,\Theta'(\Phi)=\beta\left(\gamma\frac{d^2\Phi}{d\beta\,d\gamma}+\gamma'\frac{d^2\Phi}{d\gamma\,d\beta'}+\frac{d\Phi}{d\beta}\right)$$
$$+\beta'\left(\gamma\frac{d^2\Phi}{d\beta\,d\gamma'}+\gamma'\frac{d^2\Phi}{d\beta'd\gamma'}+\frac{d\Phi}{d\beta'}\right),$$

$$\Theta'\,.\,\Theta(\Phi)=\gamma\left(\beta\frac{d^2\Phi}{d\gamma\,d\beta}+\beta'\frac{d^2\Phi}{d\gamma'\,d\beta}+\frac{d\Phi}{d\gamma}\right)$$
$$+\gamma'\left(\beta\frac{d^2\Phi}{d\gamma\,d\beta'}+\beta'\frac{d^2\Phi}{d\gamma'd\beta'}+\frac{d\Phi}{d\gamma'}\right)$$

folgt

$$\Theta\,.\,\Theta'(\Phi)-\Theta'\,.\,\Theta(\Phi)=\beta\frac{d\Phi}{d\beta}+\beta'\frac{d\Phi}{d\beta'}-\gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}-\gamma'\frac{d\Phi}{d\gamma'}=0.$$

Da nun $A_0, A_1, \ldots$ homogene Functionen von gleichem Grade in $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$ sind, so hat man

$$\beta\frac{dA_i}{d\beta}+\gamma\frac{dA_i}{d\gamma}+\beta'\frac{dA_i}{d\beta'}+\gamma'\frac{dA_i}{d\gamma'}=n\,A_i$$

und findet nach den oben für X, Y gegebenen Werthen

$$\beta\frac{dX}{d\beta}+\gamma\frac{dX}{d\gamma}+\beta'\frac{dX}{d\beta'}+\gamma'\frac{dX}{d\gamma'}=-X,$$

$$\beta\frac{dY}{d\beta}+\gamma\frac{dY}{d\gamma}+\beta'\frac{dY}{d\beta'}+\gamma'\frac{dY}{d\gamma'}=-Y,$$

und daraus

$$\beta\left(\frac{d\Phi}{d\beta}\right)+\gamma\left(\frac{d\Phi}{d\gamma}\right)+\beta'\left(\frac{d\Phi}{d\beta'}\right)+\gamma'\left(\frac{d\Phi}{d\gamma'}\right)$$
$$=-\left(X\frac{d\Phi}{dX}+Y\frac{d\Phi}{dY}\right)=-n'\Phi,$$

wenn man durch n' den Grad der Function Φ oder φ, deren Covarianten-Natur zu erweisen ist, in den Veränderlichen bezeichnet.

In Folge dessen ist auch

$$\beta\frac{d\Phi}{d\beta}+\gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}+\beta'\frac{d\Phi}{d\beta'}+\gamma'\frac{d\Phi}{d\gamma'}=n\sum_0^n{}_i A_i\frac{d\Phi}{dA_i}-n'\Phi$$
$$=(n\nu-n')\,\Phi=2\mu\,\Phi.$$

Wegen der vorher bewiesenen Gleichung

$$\beta\frac{d\Phi}{d\beta}+\beta'\frac{d\Phi}{d\beta'}-\gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}-\gamma'\frac{d\Phi}{d\gamma'}=0$$

ergiebt sich daraus die Gültigkeit der beiden Relationen

$$\beta\frac{d\Phi}{d\beta}+\beta'\frac{d\Phi}{d\beta'}=\mu\Phi,\quad \gamma\frac{d\Phi}{d\gamma}+\gamma'\frac{d\Phi}{d\gamma'}=\mu\Phi.$$

Ihre Integration unter Berücksichtigung einer der beiden Gleichungen

$$\Theta(\Phi)=0,\quad \Theta'(\Phi)=0$$

liefert

$$\Phi=(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^{\mu}\,.\,K,$$

wo K eine bezüglich der $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$ constante Function von $a_0, a_1, \ldots a_n, x, y$ ist. Um die Form derselben zu bestimmen, setzt man

$$\beta=\gamma'=1,\quad \gamma=\beta'=0,$$

wodurch die $A_0, A_1, \ldots X, Y$ zu den $a_0, a_1, \ldots x, y$ werden, und man erkennt, dass

$$K=\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n, x, y)$$

ist, so dass man durch Substitution in die Integralgleichung die definierende Relation der Covarianten

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^{\mu}\,\varphi(x,y)=\Phi(X, Y)$$

wieder erhält.

Es ist ferner von Wichtigkeit, auch hier die Covarianten und Invarianten als Functionen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Originalgleichung zu betrachten und die characteristischen Differentialgleichungen derselben aus diesen herzuleiten.

Ist

$$(a_0, a_1, \ldots a_n \between x, y)^n = a_0(x-\alpha_1 y)\,(x-\alpha_2 y)\ldots(x-\alpha_n y),$$

so sei

$$B_j=\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-j+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots j}$$

und man hat

$$B_j\frac{da_j}{d\alpha_i}=-\{B_{j-1}a_{j-1}+B_{j-2}a_{j-2}\alpha_i+\ldots+B_1 a_1\alpha_i^{j-2}+a_0\alpha_i^{j-1}\}\,^{*})$$

---

*) $\frac{a_j}{a_0}$ ist die Summe der Producte von je j Wurzeln der Gleichung und kann daher betrachtet werden als die Summe aus dem Product

und nach den Newton'schen Formeln über die Summen gleicher Potenzen

$$\Sigma_i{}_1^n \frac{d a_j}{d \alpha_i} = -j a_{j-1}, \quad \Sigma_i{}_1^n \alpha_i \frac{d a_j}{d \alpha_i} = j a_j,$$

$$\Sigma_i{}_1^n \alpha_i^2 \frac{d a_j}{d \alpha_i} = (n-j) a_{j+1} + a_j s_1.$$

Ist nun f eine beliebige Function von $a_0, a_1, \ldots a_n$ und somit von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so ist darnach

$$\Sigma_i{}_1^n \frac{df}{d\alpha_i} = -\Sigma_j{}_1^n j a_{j-1} \frac{df}{da_j},$$

$$\Sigma_i{}_1^n \alpha_i \frac{df}{d\alpha_i} = \Sigma_j{}_1^n j a_{j-1} \frac{df}{da_j},$$

$$\Sigma_i{}_1^n \alpha_i^2 \frac{df}{d\alpha_i} = s \Sigma_j{}_1^n a_j \frac{df}{da_j} + \Sigma_j{}_1^n (n-j) a_{j+1} \frac{df}{da_j},$$

als die Gruppe der Transformationsformeln.

Wenn speciell f ein Coefficient c_i der Covariante

$$(c_0, c_1, c_2, \ldots c \between x, y)^{n'}$$

der Form u ist, so geht die allgemeine Differentialgleichung

$$\vartheta \,.\, c_i = i c_{i-1}$$

in

$$\Sigma_j{}_1^n \frac{d c_i}{d x_j} = -i c_{i-1}$$

über; man hat zugleich

$$\Sigma_j{}_1^n \alpha_j^2 \frac{d c_i}{d x_j} = s \Sigma_j{}_1^n a_j \frac{d c_i}{d a_j} - n a_1 \frac{d c_i}{d a_0} + (n' - i) c_{i+1}$$

und also für $i = 0$

$$a_0 s_1 + n a_1 = 0,$$

wie bekannt.

---

einer beliebigen Wurzel α_i mit der Summe der Producte von je $(j-1)$ übrigen Wurzeln und der Summe der Producte von je j der übrigen Wurzeln. Die Differentiation nach α_i lässt diesen zweiten Theil verschwinden, so dass

$$\frac{d a_j}{d \alpha_i} \frac{1}{a_0}$$

als die Summe der Producte von je $(j-1)$ der übrigen Wurzeln der Gleichung, d. h. als der Coefficient von x^{n-j-1} in der Entwickelung von $\frac{u(\alpha)}{a_0(\alpha - \alpha_i)}$ sich erweist, wie es die Relation im Texte fordert.

Man hat auch

$$\sum_1^n{}_j\, a_j \frac{dc_i}{da_j} = \nu c_i,$$

wenn ν den Grad des Coefficienten c_i in den Coefficienten der Originalform bezeichnet, also

$$\sum_1^{n'}{}_j\, \alpha_j{}^2 \frac{dc_i}{d\alpha_j} = \nu s_1 c_i + (n'-i)\, c_{i+1},$$

$$\sum_1^n{}_j\, \alpha_j \frac{dc_i}{d\alpha_j} = \tfrac{1}{2}(2i + n\nu - n')\, c_i,$$

so dass

$$\tfrac{1}{2}(2i + n\nu - n')$$

der Grad des Coefficienten c_i in den Wurzeln der Gleichung ist. Daraus folgt, dass c_0 vom Grade $\frac{n\nu - n'}{2}$ ist und der Gleichung

$$\sum_1^n{}_j \frac{dc_0}{d\alpha_j} = 0$$

genügt.

Nach dem Vorhergehenden erhält man endlich für eine Covariante C die allgemeinen Cayley'schen Gleichungen unter denselben Voraussetzungen in der Form

$$\sum_1^n{}_j \frac{dC}{d\alpha_j} + y\frac{dC}{dx} = 0,$$

$$\sum_1^n{}_j\, \alpha_j^2 \frac{dC}{d\alpha_j} - x\frac{dC}{dy} = s_1 \nu C;$$

aus diesen aber wieder für eine Invariante J die specielleren entsprechenden

$$\sum_1^n{}_j \frac{dJ}{d\alpha_j} = 0, \quad \sum_1^n{}_j\, \alpha_j \frac{dJ}{d\alpha_j} = \frac{n\nu}{2} J.$$

Die Invariante ist also eine Function vom Grade $\frac{n\nu}{2}$ in den Wurzeln, in welcher keine der Wurzeln einen Exponenten hat, welcher ν übersteigt, und sie erfüllt überdiess die Gleichung

$$\sum_1^n{}_j \frac{dJ}{d\alpha_j} = 0,$$

so dass sie nothwendig eine Function der Wurzeldifferenzen sein muss. Offenbar gilt das Nämliche von dem Coefficienten c_0 jeder Covariante;

er ist eine Function der Wurzeln vom Grade $\frac{n\nu - n'}{2}$, in welcher keine Wurzel mit einem höheren als dem Exponenten ν behaftet ist, und muss die Differentialgleichung

$$\Sigma_1^n{}_j \frac{dc_0}{d\alpha_j} = 0$$

bewähren, d. h. eine Function der Wurzeldifferenzen sein. Wenn diess auch früher schon auf ganz anderem Wege erkannt war, so ist doch von hoher Wichtigkeit, den Nachweis derselben Wahrheit auf dem jetzt eingeschlagenen zu führen.*) Denn es ist diese Seite ihrer Natur, durch welche die Invarianten und Covarianten in der Theorie der algebraischen Gleichungen eine so durchgreifende Wichtigkeit erlangen, wie sie ihnen nach allen neueren Untersuchungen zukommt.**)

Wie die Entwickelungen dieser Artikel von den allgemeinen Eigenschaften der Invarianten und Covarianten an

---

*) Man verdankt ihn Brioschi und mag am a. O. eine Anwendung auf die allgemeine Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln vergleichen.

**) An dieser Stelle möchten die weiteren Ausführungen am Platze sein, welche der Satz, dass die symmetrischen Functionen der Wurzeln die Quelle aller Covarianten der binären Formen aller Grade sind, durch neuere Untersuchungen erfahren hat. Wir müssen vorziehen, besonders auf diejenigen Entwickelungen zu verweisen, welche M. Roberts neuestens gegeben hat. „Quarterly Journal of pure and appl. Mathem.“ No. XIII, p. 57—65, No. XIV, p. 168—178. „Annali di Matematica“ etc. da Tortolini. Vol. III, p. 172—178, p. 340—344. Vol. IV, p. 50—51.

Sie stützen sich vor Allem auf die Natur des Operationssymbols ϑ und des allgemeineren ϑ_p, als welches die successive $p$malige Wiederholung der Operation ϑ an derselben Function von $a_0, a_1, \ldots a_n$ bezeichnet; der Vollzug der von jenen geforderten Operationen wirkt in den Indices der a_i ebenso wie der der Differentiation in den Exponenten und man hat

$$\vartheta_p \cdot \varphi_m = (-1)^p\, m(m-1) \ldots (m-p+1)\, \varphi_{m-p},$$

wenn

$$\varphi_m = a_0^{2n-4}\, \Sigma \alpha_1^m (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

ist, dieselbe symmetrische Function, welche früher so einfach zur Bestimmung einer doppelten Wurzel führte. Die Betrachtungen, welche sich daran knüpfen, führen von allen Seiten auf die Determinante der

die Discriminanten, insofern sie zugleich Resultanten und sehr einfache symmetrische Functionen sind, anknüpften, so mögen sie auch zweckmässig mit einer Untersuchung

---

Summen gleicher Potenzen zurück, und dadurch auf das Sturm'sche Theorem und so vieles Andere, was hier entscheidend war. Man hat

$$\varphi_0 = a_0^{2n-4} \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots & s_{n-2} \\ s_1, & s_2, & \ldots & s_{n-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ s_{n-2}, & s_{n-1}, & \ldots & s_{2n-4} \end{vmatrix}.$$

und findet

$$\vartheta \,.\, \varphi_m = m\varphi_{m-1}$$

und erkennt zudem leicht, dass durch die Substitution von a_{n-i} statt a_i die Function φ_m in die analoge Function φ_{2n-4-m} übergeführt wird. Man geht dadurch von dem bekannten Ausdruck von φ_0 in den Coefficienten der Form zuerst zu φ_{2n-4} über und von ihm durch Differentiation nach einander zu φ_{2n-5}, etc. Für die Formen des 3. und 4. Grades hat man

$$\varphi_0 = 18\,(a_1^2 - a_0 a_2) = -18 J_{2,2},$$

$$\varphi_0 = 192\,(a_0^2 a_2 a_4 + 14\,a_0 a_1 a_2 a_3 + 6\,a_1^2 a_2^2 - a_0 a_1^2 a_4 - 8\,a_1^3 a_3 - 3\,a_0^2 a_3^2 - 9\,a_0 a_2^3 = 192\left(2J_{4,3} \cdot \frac{dJ_{4,2}}{da_4} - 3J_{4,2} \cdot \frac{dJ_{4,3}}{da_4}\right),$$

und analoge einfache Ausdrücke für die übrigen Formen φ. Ist dann F eine homogene Function der Grössen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, so ist sie auch eine Function der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn die Bedingung

$$\vartheta F = 0$$

erfüllt wird; eine solche Function ist zugleich von constantem auch bei der Veränderung von $a_0, a_1, \ldots a_i, \ldots$ in $a_n, a_{n-1}, \ldots a_{n-i}, \ldots$ bleibendem Gewicht und daher eine Invariante der gegebenen Form. Und allgemein ist die Form

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n-4} \between x, y)^{2n-4}$$

eine Covariante der Form

$$(a_0, a_1, \ldots a_n \between x, y)^n.$$

Die Sturm'schen Constanten sind Quellen von Covarianten und es entspricht z. B. der einfachsten unter ihnen

$$S_1 = a_0^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}$$

die Hesse'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2}{dx^2}, & \dfrac{d^2}{dx\,dy} \\ \dfrac{d^2}{dx\,dy}, & \dfrac{d^2}{dy^2} \end{vmatrix}.$$

über dieselben schliessen; es soll gezeigt werden, wie sich die allgemeinen Differentialgleichungen der Invarianten für diese specielle symmetrische Gestalt der Function der Wurzeldifferenzen, welche man Discriminante nennt, gestalten.

Natürlich genügt die Discriminante der allgemeinen Differentialgleichung der Invarianten

$$\vartheta J=0, \quad \vartheta^* J=0;\text{*)}$$

aber in ihrem speciellen Falle gehören diese Letzteren selbst einer ganzen Gruppe von Differentialgleichungen als einzelne Glieder an. Die zu diesem Nachweis nöthigen Betrachtungen schliessen sich an die letzt vorhergehenden Untersuchungen und Bezeichnungen an.

Sei

$$\varepsilon_{m,j}=\varepsilon_{j,m}=\Sigma_i{}_1^m\,(j+m-2i)\,B_{i-1}\,B_{j+m-i-1}\,a_{i-1}\,a_{j+m-i-1} \\ -(n-j+1)\,B_{m-1}\,B_{j-1}\,a_{m-1}\,a_{j-1},$$

so gilt die Gleichung

$$-B_m\,B_j\,\Sigma_i{}_1^m\frac{d a_m}{d\alpha_i}\,\frac{d a_j}{d\alpha_i}=\varepsilon_{m,j}.$$

Ist nun f eine beliebige Function der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Wurzeln der betrachteten Gleichung $u(x,1)=0$, so hat man wegen

$$\frac{df}{da_1}\,\frac{da_1}{d\alpha_i}+\frac{df}{da_2}\,\frac{da_2}{d\alpha_i}+\ldots+\frac{df}{da_n}\,\frac{da_n}{d\alpha_i}=\frac{df}{d\alpha_i}$$

$$\frac{1}{B_1}\,\varepsilon_{m,1}\,\frac{df}{da_1}+\frac{1}{B_2}\,\varepsilon_{m,2}\,\frac{df}{da_2}+\ldots+\frac{1}{B_n}\,\varepsilon_{m,n}\,\frac{df}{da_n}=-B_m\,\Sigma_i{}_1^n\frac{da_m}{d\alpha_i}\,\frac{df}{d\alpha_i}.\text{**)}$$

Ist aber f speciell die Discriminante der entsprechenden homogenen Form, so dass

$$f=D=a_0^{2(n-1)}\,(\alpha_1-\alpha_2)^2\,(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

ist, so wird

$$\frac{dD}{dx_i}=D\,\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i}{\left(\frac{du}{dx}\right)_i},$$

*) Wie man mittelst derselben die Discriminanten der Formen von höheren Graden successiv aus der eines niederen Grades berechnen kann, hat Cayley gezeigt im 47. Bde. von Crelle's Journal, p 123.

**) Es hat Interesse, für f z. B. eine beliebige Wurzel der Gleichung α_i zu wählen.

wenn der Index i den durch Substitution der Wurzel α_i statt x in den eingeschlossenen Differentialquotienten erhaltenen Werth bezeichnet.

Mittelst

$$-\frac{1}{B_j}\frac{d\alpha_i}{da_j}=\frac{\alpha_i^{n-j}}{\left(\frac{du}{dx}\right)_i}$$

folgt sodann

$$-\frac{dD}{d\alpha_i}=n(n-1)D\left(\frac{1}{B_2}a_0\frac{d\alpha_i}{da_2}+\frac{n-2}{B_3}a_1\frac{d\alpha_i}{da_3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2B_4}a_2\frac{d\alpha_i}{da_4}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{B_n}a_{n-2}\frac{d\alpha_i}{da_n}\right)$$

und daraus durch

$$\sum_1^n{}_i\frac{da_j}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{da_m}=0,\quad \sum_1^n{}_i\frac{da_m}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{da_m}=1$$

und somit

$$-\sum_1^n{}_i\frac{da_m}{d\alpha_i}\frac{dD}{d\alpha_i}=(n-m+2)(n-m+1)B_{m-2}a_{m-2}D$$

bei der auszuführenden Substitution in

$$\frac{1}{B_1}\varepsilon_{m,1}\frac{dD}{da_1}+\frac{1}{B_2}\varepsilon_{m,2}\frac{dD}{da_2}+\dots+\frac{1}{B_n}\varepsilon_{m,n}\frac{dD}{da_n}=-B_m\sum_1^n{}_i\frac{da_m}{d\alpha_i}\frac{dD}{d\alpha_i}$$

die Gleichung

$$\sum_1^n{}_j\frac{1}{B_j}\varepsilon_{m,j}\frac{dD}{da_j}=(n-m+2)(n-m+1)B_{m-2}a_{m-2}D,$$

in welcher m die Werthe $1, 2, 3, \dots n$ erhalten kann.

Für $m=1$ erhält man speciell

$$\sum_1^n{}_j\frac{1}{B_j}\varepsilon_{1,j}\frac{dD}{da_j}=-a_0\sum_1^n{}_j(n-j+1)\frac{B_{j-1}}{B_j}a_{j-1}\frac{dD}{da_j}=-a_0\sum_1^n{}_j ja_{j-1}\frac{dD}{da_j}=0,$$

die eine der bekannten Differentialgleichungen der Invarianten.

Für $m=2, 3, \dots n$ hat Brioschi*) die vereinfachte Form gegeben

$$\sum_1^n{}_j\frac{1}{B_j}E_{m,j}\frac{dD}{da_j}=(n-m+2)(n-m+1)B_{m-2}a_{m-2}D,$$

in welcher

$$E_{m,j}=\sum_1^m{}_i(j+m-2i)B_{i-1}B_{j+m-i-1}a_{i-1}a_{j+m-i-1}$$

gesetzt ist.

---

*) „Annali di Matemat. da Tortolini", t. II, (1859) p. 83.

Diese Formel sei*) angewendet auf die Untersuchung des gegenseitigen Zusammenhanges zwischen den Invarianten $J_{5,4}$ und $J_{5,8}$ des vierten und achten Grades oder Form vom fünften Grade

$$(a_0, a_1, \ldots a_5 \between x, y)^5.$$

Man setze

$$2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) = A, \quad a_0 a_5 - 3a_0 a_4 + 2a_2 a_3 = B,$$
$$2(a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2) = C,$$

ferner

$$-6\varkappa = a_0 C - 2a_1 B + a_2 A, \quad -6\mu = a_2 C - 2a_3 B + a_4 A,$$
$$-6\lambda = a_1 C - 2a_2 B + a_3 A, \quad -6\nu = a_3 C - 2a_4 B + a_5 A,$$

so hat man

$$J_{5,4} = AC - B^2, \quad J_{5,8} = 9\{A(\lambda\nu - \mu^2) + B(\lambda\mu - \varkappa\nu) + C(\varkappa\mu - \lambda^2)\}.$$

Man erhält sodann durch Anwendung der vorgenannten allgemeinen Gleichung auf diese Invarianten die Relationen

$$\Sigma_j{}_1^5 \frac{1}{B_j} E_{4,j} \frac{dJ_{5,4}}{da_j} = 30a_2 J_{5,4} + 48(A\mu - 2B\lambda + C\varkappa),$$
$$\Sigma_j{}_1^5 \frac{1}{B_j} E_{4,j} \frac{dJ_{5,8}}{da_j} = 60a_2 J_{5,8} + \tfrac{3}{4} J_{5,4}(A\mu - 2B\lambda + C\varkappa).$$

Setzt man aber die Discriminante der binären Form fünften Grades

$$D_5 = J_{5,4}^2 + hJ_{5,8},$$

was nach den Gesetzen über Grad und Gewicht aller drei Invarianten jedenfalls statthaft ist, so findet man durch Anwendung derselben allgemeinen Gleichung

$$\Sigma_j{}_1^5 \frac{1}{B_j} E_{4,j} \frac{dD_5}{da_j} = 60a_2(J_{5,4}^2 + hJ_{5,8}) + (A\mu - 2B\lambda + C\varkappa)(96 + \tfrac{3}{4}h);$$

und da nach der allgemeinen Formel selbst das letzte Glied der rechten Seite dieses Ausdrucks identisch verschwinden muss, nothwendig

$$h = -128,$$

also

$$D_5 = J_{5,4}^2 - 128J_{5,8}.$$

Die entwickelte Gestalt dieser Invarianten und der Discriminante würde die Entdeckung dieser Relation sehr erschweren.

*) Brioschi a. a. O.

III. Kapitel.

Die binären Formen des dritten und vierten Grades und die neuere Geometrie, sammt den Elementen der Theorie metrischer Relationen.

22.

Es bleibt endlich noch übrig, die Anwendungen des Vorhergehenden auf die Formen des dritten und vierten Grades zu machen, respective zusammenzustellen, und den Gewinn oder den Antheil darin aufzuweisen, den dieselben für die Grundvorstellungen der neueren Geometrie ergeben.*)

Zunächst für die cubische Form

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3,$$

als welche durch die der Unbekannten $\frac{x}{y}$ gegebenen speciellen Werthe α_1, α_2, α_3 auf Null reduciert wird, so dass man hat

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between x, y)^3 = 0 = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y).$$

Im 17. Artikel ist die Ableitung ihrer Invariante vierten Grades oder ihrer Discriminante

$$a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2$$

angedeutet worden;**) dieselbe ist zugleich auch die Discriminante der quadratischen Covariante der cubischen Form,

---

*) Man vergleiche Cayley, „Fifth Memoir upon Quantics," „Philos. Transact.", 1858, Vol. 148, p. 441 f., welchem hier grossentheils gefolgt ist.

**) Als die letzte der Sturm'schen Functionen für die cubische Form steht sie im Art. 12.

d. i. der Hesse'schen Covariante derselben; als solche erhält sie nach Artikel 18 die Form

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2).$$

In Gliedern der Wurzeln ist sie

$$= -\frac{a_0^4}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2.$$

Ihr identisches Verschwinden bezeichnet das Zusammenfallen zweier Elemente des durch die Form selbst bei ihrer Gleichsetzung mit Null dargestellten geometrischen Gebildes.

Die Hesse'sche Covariante selbst ward in der Form

$$(a_0 a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)xy + (a_1 a_3 - a_2^2)y^2$$

an dem bezeichneten Orte gegeben und ist in ihrer Determinantenform als durch das Symbol

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2}{dx^2}, & \frac{d^2}{dx\,dy} \\ \frac{d^2}{dx\,dy}, & \frac{d^2}{dy^2} \end{vmatrix}$$

aus der Originalform entspringend,

$$= \begin{vmatrix} (a_0 x + a_1 y), & (a_1 x + a_2 y) \\ (a_1 x + a_2 y), & (a_2 x + a_3 y) \end{vmatrix},$$

oder durch leichte Umformungen

$$= \begin{vmatrix} y^2, & a_0, & a_1 \\ -xy, & a_1, & a_2 \\ x^2, & a_2, & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x^2, & a_2, & a_3 \\ xy, & a_1, & a_2 \\ -y^2, & a_0, & a_1 \end{vmatrix}.$$

Von da gelangt man zu ihrem Ausdruck in Function der Wurzeln nach den vielfach im Vorigen dargestellten allgemeinen Zusammenhängen; man hat diesen Ausdruck entweder

$$= -\frac{a_0^2}{18}\{(x-\alpha_1 y)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2 + (x-\alpha_2 y)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2 + (x-\alpha_3 y)^2(\alpha_1-\alpha_2)^2\}$$

$$= -\frac{a_0^2}{18}\Sigma(x-\alpha_1 y)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2,$$

oder

$$= \frac{a_0^2}{9}\{(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$+ (x-\alpha_2 y)(x-\alpha_3 y)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+ (x-\alpha_3 y)(x-\alpha_1 y)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)\}$$

$$= \frac{a_0^2}{9}\Sigma(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1),$$

übereinstimmend mit den allgemeinen Typen der Covarianten, welche im Artikel 17 gegeben worden sind.

Ihre geometrische Bedeutung wird am besten durch gleichzeitige Betrachtung der cubischen Covariante der cubischen Form erkannt,

$$(a_0^2 a_3 + 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2) x^3 + 3(a_0 a_1 a_3 + a_1^2 a_2 - 2a_0 a_2^2) x^2 y$$
$$+ 3(2a_1^2 a_3 - a_1 a_2^2 - a_0 a_2 a_3) x y^2$$
$$+ (3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3 - a_0 a_3^2) y^3.$$

Man kann sie in der Form

$$\{(a_0 a_3 - a_1 a_2) x + 2(a_1 a_3 - a_2^2) y\} (a_0 x^2 + 2a_1 x y + a_2 y^2)$$
$$- \{(a_0 a_3 - a_1 a_2) y + 2(a_0 a_2 - a_1^2) x\} (a_1 x^2 + 2a_2 x y + a_3 y^2)$$

schreiben, in welcher sie als die aus der cubischen Form und ihrer quadratischen Covariante abgeleitete Jacobi'sche Determinante erkannt wird. (Art. 18, p. 148.) Der Character dieser Letzteren und das Vorige führen zur Entdeckung ihres Ausdrucks in Function der Wurzeln der Originalgleichung; sie ist

$$= \frac{a_0^3}{27} \{(x - \alpha_1 y)(\alpha_2 - \alpha_3) - (x - \alpha_2 y)(\alpha_3 - \alpha_1)\}$$
$$\{(x - \alpha_2 y)(\alpha_3 - \alpha_1) - (x - \alpha_3 y)(\alpha_1 - \alpha_2)\}$$
$$\{(x - \alpha_3 y)(\alpha_1 - \alpha_2) - (x - \alpha_1 y)(\alpha_2 - \alpha_3)\}$$

$$= -\frac{a_0^3}{27} \{(x - \alpha_1 y)^2 (x - \alpha_2 y)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$$
$$+ (x - \alpha_2 y)^2 (x - \alpha_3 y)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$$
$$+ (x - \alpha_3 y)^2 (x - \alpha_1 y)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)\}$$

$$= - a_0^3 \{(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) x + (2\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2) y\}$$
$$\{(2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1) x + (2\alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3) y\}$$
$$\{(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) x + (2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1) y\}.$$

Zur ferneren Bestätigung dient die folgende Betrachtung: Unter der Voraussetzung

$$a_0 = a_3 = 0, \quad a_1 = a_2 = 1$$

geht die cubische Form in die Gestalt

$$3x^2 y + 3x y^2 = 3xy(x + y)$$

über, d. h. sie repräsentiert, geometrisch gesprochen, die coexistierenden Elemente

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 0.$$

Unter denselben Voraussetzungen wird aber die cubische Covariante

$$2x^3 + 3x^2 y - 3x y^2 - 2y^3$$

oder

$$(x-y)\,(2x^2+5xy+2y^2).$$

Sie stellt also drei Elemente dar, deren eines

$$x-y=0$$

als das vierte harmonische zu den drei durch die Gleichsetzung der cubischen Form mit Null bestimmten erscheint. Da nun jede cubische Form durch lineare Substitution auf die vorbezeichnete reducierte Gestalt gebracht werden kann, — wie schon aus der Zählung der in ihr implicite enthaltenen Constanten hervorgeht — und die harmonische Relation durch lineare Transformation nicht gestört wird, so muss die nämliche Beziehung der linearen Factoren der cubischen Covariante zu den linearen Factoren der cubischen Form auch im Allgemeinen stattfinden.

Nach den Ergebnissen des 2. Artikels ist das dem Element

$$x-\alpha_1 y=0$$

in Bezug auf die beiden anderen Elemente

$$x-\alpha_2 y=0,\quad x-\alpha_3 y=0$$

harmonisch conjugierte Element durch

$$(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)x+(2\alpha_2\alpha_3-\alpha_3\alpha_1-\alpha_1\alpha_2)y=0$$

repräsentiert; denn für die hypothetische Darstellung desselben durch

$$x-\alpha y=0$$

hat man die Relation der harmonischen Theilung in der Gestalt

$$\frac{2}{\alpha_1-\alpha}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_3},$$

d. i.

$$\alpha=\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3-2\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}.$$

Man erhält daraus direct die oben zuletzt gegebene Darstellung der cubischen Covariante aus ihren linearen Factoren.

Die cubische Covariante einer cubischen Form repräsentiert somit die drei Elemente, von denen jedes zu einem Elemente der Form in Bezug auf die beiden anderen Elemente derselben conjugiert harmonisch ist.

Ueberdiess aber bilden die Elemente der cubischen Form und die ihrer cubischen Covariante eine Involution von sechs Elementen, für welche die von der quadratischen Covariante bestimmten Elemente die doppelten oder sich selbst conjugierten Elemente sind.

Schon die im Vorigen gegebene Determinantenform

$$\begin{vmatrix} y^2, & a_0, & a_1 \\ -xy, & a_1, & a_2 \\ x^2, & a_2, & a_3 \end{vmatrix}$$

der quadratischen Covariante bezeichnet deutlich die ihr hier zugesprochene Bedeutung, wenn man sich an die entsprechenden Entwickelungen des Artikels 3 erinnert; aber dieselbe kann durch sehr einfache Betrachtungen auch direct erwiesen werden.

Was zunächst die Involution jener sechs Elemente betrifft, so erfüllen ihre Gleichungen die Bedingung, nach welcher die involutorische Relation durch das identische Verschwinden der Summe derselben, nachdem sie wo nöthig mit willkürlichen Constanten multipliciert sind, angezeigt wird; denn man erhält die Ausdrücke der drei involutorischen Elementenpaare durch Zusammensetzung der entsprechenden Factoren der cubischen Form und ihrer cubischen Covariante wie folgt:

$$\{(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)x+(2\alpha_2\alpha_3-\alpha_3\alpha_1-\alpha_1\alpha_2)y\}(x-\alpha_1 y),$$
$$\{(2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1)x+(2\alpha_3\alpha_1-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3)y\}(x-\alpha_2 y),$$
$$\{(2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)x+(2\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-\alpha_3\alpha_1)y\}(x-\alpha_3 y),$$

oder durch Entwickelung

$$(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)x^2+2(\alpha_2\alpha_3-\alpha_1^2)xy+(\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_1^2\alpha_2-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)y^2,$$
$$(2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1)x^2+2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2)xy+(\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_3-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)y^2,$$
$$(2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)x^2+2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2)xy+(\alpha_3^2\alpha_2+\alpha_3^2\alpha_1-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)y^2.$$

Diese Ausdrücke geben aber, respective mit

$$(\alpha_2-\alpha_3),\ (\alpha_3-\alpha_1),\ (\alpha_1-\alpha_2)$$

multipliciert, Null zur Summe.

Und die quadratische Covariante repräsentiert die sich selbst conjugierten Elemente dieser Involution, weil sie auf jedes der durch die entsprechenden Gleichungen dargestellten Elementenpaare harmonisch bezogen ist. Denn man kann, um den Beweis für das erste

derselben zu führen, den entsprechenden Ausdruck in der Form

$$\{3\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\}x^2+2\{\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\}xy$$
$$+\{\alpha_1(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}y^2$$

schreiben, aus welchen sich nach den Relationen zwischen den Wurzeln und Coefficienten der cubischen Gleichung ergiebt

$$\left(3\alpha_1+\frac{3a_1}{a_0}\right)x^2+2\left(\frac{3a_2}{a_0}+\frac{3a_1}{a_0}\alpha_1\right)xy+\left(\frac{3a_3}{a_0}+\frac{3a_2}{a_0}\alpha_1\right)y^2$$

oder

$$(a_0\alpha_1+a_1)x^2+2(a_2+a_1\alpha_1)xy+(a_3+a_2\alpha_1)y^2,$$

ein Ausdruck, dessen harmonische Beziehung zur quadratischen Covariante

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2+2\frac{a_0a_3-a_1a_2}{2}xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2$$

offenbar ist, weil man hat

$$(a_0\alpha_1+a_1)(a_1a_3-a_2^2)+(a_0a_2-a_1^2)(a_3+a_2\alpha_1)=(a_2+a_1\alpha_1)(a_0a_3-a_1a_2).$$

Und das Nämliche ergiebt sich für die beiden anderen Elementenpaare der Involution.

Die fundamentalen Covarianten der cubischen Form sind so im genauesten Zusammenhang mit den Grundlagen der neueren Geometrie erkannt; sie bilden den analytisch vollkommenen und nothwendigen Ausdruck dessen, was von jenen hier einschlägt. Die folgende Betrachtung, die sich wieder zugleich zur Discriminante wendet, wird diess noch vervollständigen, und zeigt überdiess den Zusammenhang zwischen diesen Grundlagen und der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Die cubische Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, d. h. sie ist in der Form

$$a_0(x-\alpha_1y)^2(x-\alpha_3y)=0$$

darstellbar, wenn die Discriminante den Werth Null hat; alsdann ist die quadratische Covariante

$$=-\frac{a_0^2}{9}(\alpha_1-\alpha_3)^2(x-\alpha_1y)^2,$$

und die cubische Covariante

$$=\frac{2a_0^3}{27}(\alpha_1-\alpha_3)^3(x-\alpha_1y)^3.$$

Man sieht, die quadratische und die cubische Covariante der Form dritten Grades sind dann vollkommene Potenzen linearer Factoren, sie stellen ein respective als doppelt und als dreifach anzusehendes Element dar, welches zugleich mit dem der doppelten Wurzel der Form selbst entsprechenden identisch ist.

Sollen alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich sein, so werden ausser der Discriminante auch noch die beiden Covarianten mit Null identisch; denn diess entspricht dem Falle $\alpha_1 = \alpha_3$ in den letzten Ausdrücken.

Man erkennt endlich in diesen Zusammenhängen die Folgen einer zwischen der cubischen Form, ihren beiden respective quadratischen und cubischen Covarianten und ihrer Discriminante bestehenden Relation; dieselbe ist von Cayley entdeckt worden und lässt sich durch folgende Schlüsse leicht erkennen. Man kann jede binäre cubische Form durch lineare Substitution auf die Form

$$a_0 x^3 + a_3 y^3$$

reducieren; man darf also auch in ihren Invarianten und Covarianten überall

$$a_1 = a_2 = 0$$

setzen, ohne ihre gegenseitigen Beziehungen zu stören. Wenn aber hierdurch die Discriminante

$$D_3 = a_0^2 a_3^2,$$

die quadratische Covariante

$$C_{3,2} = a_0 a_3 x y$$

und die cubische Covariante

$$C_{3,3} = a_0^2 a_3 x^3 - a_0 a_3^2 y^3 = a_0 a_3 (a_0 x^3 - a_0 y^3)$$

wird, so erkennt man, dass zwischen diesen Functionen und der Form U selbst die Relation

$$C_{3,3}^2 - D_3 \,.\, U^2 = -4\, C_{3,2}^3$$

oder

$$C_{3,3}^2 + 4\, C_{3,2}^3 = D_3 \,.\, U^2$$

besteht, die damit als allgemein gültig bewiesen ist. Mit denselben Voraussetzungen zeigt sich auch, was geometrisch schon aus dem Vorigen evident ist, dass die Discriminante der cubischen Covariante der Cubus der Discriminante der cubischen Form selbst ist, d. h. dass die cubische Form

selbst und ihre cubische Covariante stets gleichzeitig ein System gleicher Wurzeln besitzen, wie schon gezeigt ist.

Und was die Auflösung cubischer Gleichungen anbetrifft, so zeigt die Relation

$$C_{3,3}^2 - D_3 \,.\, U^2 = -4\, C_{3,2}^3,$$

dass die Ausdrücke

$$\frac{(C_{3,3} + U\sqrt{D_3})}{2} \text{ und } \frac{C_{3,3} - U\sqrt{D_3}}{2}$$

vollständige Cuben und ihre Cubikwurzeln also lineare Functionen von x, y sind. In Folge dessen ist auch der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{C_{3,3} + U\sqrt{D_3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{C_{3,3} - U\sqrt{D_3}}{2}}$$

eine in x, y lineare Function, und da sie für $U = 0$ verschwindet, so ist sie einer der linearen Factoren der cubischen Form.

Es lässt sich diess auch aus der Betrachtung derselben Formen in Function der Wurzeln erweisen. Man hat

$$C_{3,3} = -\frac{a_0^3}{27}\Big\{(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1 y)-(\alpha_3-\alpha_1)(x-\alpha_2 y)\Big\}\Big\{(\alpha_3-\alpha_1)(x-\alpha_2 y)-(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_3 y)\Big\}$$
$$\Big\{(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_3 y)-(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1 y)\Big\}$$

und erkennt aus den früher gegebenen Werthen

$$D_3\, U^2 = -\frac{a_0^6}{27}\Big\{(\alpha_2-\alpha_3)^2 (x-\alpha_1 y)^2 (\alpha_3-\alpha_1)^2 (x-\alpha_2 y)^2 (\alpha_1-\alpha_2)^2 (x-\alpha_3 y)^2\Big\},$$

also unter Anwendung des Zeichens ω für eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit

$$U\sqrt{D_3} = \frac{a_0^3}{9}(\omega-\omega^2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)(x-\alpha_3 y),$$

und daraus

$$\frac{C_{3,3}+U\sqrt{D_3}}{2} = \frac{a_0^3}{27}\Big\{(\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega\alpha_3)x+(\alpha_2\alpha_3+\omega^2\alpha_3\alpha_1+\omega\alpha_1\alpha_2)y\Big\}^3,$$

$$\frac{C_{3,3}-U\sqrt{D_3}}{2} = \frac{a_0^3}{27}\Big\{(\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3)x+(\alpha_2\alpha_3+\omega\alpha_3\alpha_1+\omega^2\alpha_1\alpha_2)y\Big\}^3,$$

somit

$$\sqrt[3]{\frac{C_{3,3}+U\sqrt{D_3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{C_{3,3}-U\sqrt{D_3}}{2}} = -\frac{a_0}{3}(\omega-\omega^2)(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1 y).$$

23.

Sodann für die Form des vierten Grades

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \between x, y)^4 = a_0(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)(x-\alpha_3 y)(x-\alpha_4 y)$.

Die quadratische Invariante derselben ist im 18. Artikel in der Form

$$J_{4,2} = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

und ebenda auch ihre cubische Invariante

$$J_{4,3} = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3$$

entwickelt worden. Diesen ist die Discriminante

$$\begin{aligned} D_4 = {} & a_0^3 a_4^3 - 12 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 + 18 a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 54 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 - 27 a_0^2 a_3^4 + 54 a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 \\ & - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 - 180 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 108 a_0 a_1 a_2 a_3^3 + 81 a_0 a_2^4 a_4 \\ & - 54 a_0 a_2^3 a_3^2 - 27 a_1^3 a_4^2 + 108 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64 a_1^3 a_3^3 - 54 a_1^2 a_2^3 a_4 \\ & + 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2 \end{aligned}$$

beizufügen, welche nach den verschiedenen früher gegebenen Methoden leicht entwickelt werden kann.*)

Wenn man diese Invarianten in Gliedern der Wurzeln ausdrücken will, so findet man

$$\begin{aligned} J_{4,2} & = \frac{a_0^2}{24} \left\{ (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2 + (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 + (\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 \right\} \\ & = -\frac{a_0^2}{12} \left\{ (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) + (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4) \right. \\ & \qquad \left. + (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) \right\}, \end{aligned}$$

wofür man mit leicht erkennbarer Abkürzung schreiben kann

$$J_{4,2} = \frac{a_0^2}{24}(C^2 + A^2 + B^2) = -\frac{a_0^2}{12}(CA + AB + BC),$$

während zugleich

$$A + B + C = 0$$

ist.

Alsdann ergiebt sich ebenso

$$\begin{aligned} J_{4,3} & = \frac{a_0^3}{432} \left\{ (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) - (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) \right\} \left\{ (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) - (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4) \right\} \\ & \qquad \left\{ (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4) - (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) \right\} \\ & = \frac{a_0^3}{432} \cdot (C-A)(A-B)(B-C), \end{aligned}$$

*) Sie ist in Art. 12 als die letzte der Sturm'schen Functionen für die Form des vierten Grades schon gegeben.

und endlich für die Discriminante

$$D_4 = \frac{a_0^6}{256}(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2$$

$$= \frac{a_0^6}{256} A^2 . B^2 . C^2.$$

Man erkennt darin zunächst die *Abhängigkeit der Discriminante von den beiden Invarianten* wieder, welche in der auf die Gleichung der Quadrate der Differenzen gerichteten Untersuchung des 19. Artikels schon in ganz anderer Weise sich manifestiert hat,

$$D_4 = J_{4,2}^3 - 27\, J_{4,3}^2.$$

Man erkennt dieselbe am bequemsten ohne Zuhilfenahme der Ausdrücke in Function der Wurzeln, wenn man die allgemeine Form des vierten Grades auf die reducierte aber gleichfalls allgemeine Ausdrucksweise

$$x^4 + 6a_2 x^2 y^2 + y^4$$

bringt, so dass

$$a_0 = a_4 = 1, \quad a_1 = a_3 = 0$$

ist. Denn dann hat man

$$J_{4,2} = 1 + 3a_2^2, \quad J_{4,3} = a_2(1-a_2^2),$$
$$D_4 = 1 - 18a_2^2 + 81\, a_2^4 = (1-9a_2^2)^2$$

und bewährt leicht

$$(1-9a_2^2)^2 = (1+3a_2^2)^3 - 27\, a_2^2(1-u_2^2)^2.$$

Für die gegenwärtige Betrachtung ist es von besonderem Werthe, die *geometrische Bedeutung der cubischen Invariante* zu erörtern, wie sie aus dem gegebenen Ausdruck in Function der Wurzeln hervorgeht. Wenn dieselbe den Werth Null besitzt, so muss eine der drei Relationen

$$(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) = (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4), \quad \text{oder } A = B,$$
$$(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4) = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4), \quad \text{-} \quad B = C,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) = (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4), \quad \text{-} \quad C = A$$

erfüllt sein. Sie geben die bekannten Gleichungen

$$\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_1} : \frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_4-\alpha_1} = -1,$$

$$\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2} : \frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_4-\alpha_2} = -1,$$

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_3} : \frac{\alpha_1-\alpha_4}{\alpha_4-\alpha_3} = -1,$$

welche gleichmässig ausdrücken, dass die vier Elemente, welche die Originalgleichung selbst repräsentiert, ein harmonisches System bilden.

Wenn man aber ferner bemerkt, dass

$$\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{A}$$

die drei anharmonischen Verhältnisse sind — sie mögen wie früher als δ_1, δ_2, δ_3 abkürzend bezeichnet werden, — welche die vier von der biquadratischen Gleichung repräsentierten Elemente bestimmen, so erkennt man durch die aus dem Vorigen zu ziehende Relation

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = \frac{27}{2} \frac{(A^2+B^2+C^2)^3}{(A-B)^2(B-C)^2(C-A)^2} = \frac{27}{2} \frac{\left(\frac{1}{\delta_3^2}+\delta_2^2+1\right)^3}{\left(\frac{1}{\delta_3}-\delta_2\right)^2(\delta_2-1)^2\left(1-\frac{1}{\delta_3}\right)^2}$$

und nach den zwischen den drei Doppelschnittverhältnissen bestehenden Relationen (Art. 3)

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2} = 108 \frac{(\delta_1^2-\delta_1+1)^3}{\delta_1^2(\delta_1+1)^2};$$

und es lassen sich analoge Ausdrücke in δ_2 und δ_3 bilden. Man erfährt aus ihnen, dass die Werthe der durch die Elemente der biquadratischen Form bestimmten Doppelschnittverhältnisse allein von dem Verhältniss der fundamentalen Invarianten

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2}$$

abhängen;*) dass also die Elementargruppen aller Gleichungen des vierten Grades, für welche diess Verhältniss

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2}$$

denselben Werth hat, die nämlichen Doppelschnittverhältnisse bestimmen.

Für

$$\delta_1 = -1,$$

*) Zu demselben Ergebniss gelangte G. Salmon schon im 205. Artikel seines „Treatise on the higher plane Curves" 1852 auf einem ganz anderen Wege.

d. i. die harmonische Relation kommt man wieder auf die schon vorher erkannte Bedingung

$$J_{4,3} = 0$$

zurück, für

$$\delta_1 = +1,$$

welches bekanntlich nur für zwei zusammenfallende Theilpunkte der Strecke möglich ist, findet man

$$J_{4,2}^3 = 27\, J_{4,3}^2,$$

d. h. die Discriminante verschwindet identisch. Hätte man die Relation der Discriminante mit der quadratischen und der cubischen Invariante nicht schon gekannt, so wäre diess ein Weg gewesen, sie zu entdecken.

Da das Verschwinden der Discriminante die Existenz zweier gleicher Wurzeln characterisiert,*) so liegt die Frage nahe nach den sonstigen Systemen von Gleichheiten unter den Wurzeln der biquadratischen Gleichung. Indess kann dieselbe nicht allein durch die Betrachtung der Invarianten erledigt werden. Für zwei Paare von gleichen Wurzeln

$$\alpha_1 = \alpha_2, \ \alpha_3 = \alpha_4,$$

als für welche die Form selbst

$$= a_0 (x - \alpha_1 y)^2 (x - \alpha_3 y)^2$$

ist, haben die quadratische und cubische Invariante die Werthe

$$J_{4,2} = \frac{a_0^2}{12} (\alpha_1 - \alpha_3)^4,$$

$$J_{4,3} = -\frac{a_0^3}{216} (\alpha_1 - \alpha_3)^6,$$

so dass

$$\frac{J_{4,2}^3}{J_{4,3}^2}$$

eine reine Zahl ist, $= 27$; daraus folgt aber, wie natürlich, das Verschwinden der Discriminante. Setzt man hier

$$\frac{a_0^2}{12} (\alpha_1 - \alpha_3)^2 = J_{2,2},$$

---

*) Man kann hinzufügen, dass die biquadratische Gleichung ein Paar imaginäre wie ein Paar reelle Wurzeln hat, wenn die Discriminante negativ ist; während die Wurzeln alle reell oder imaginär sind bei positiver Discriminante.

so hat man die Relationen

$$a_0^2 J_{4,2} = 12 J_{2,2}^2,$$
$$a_0^3 J_{4,3} = -8 J_{2,2}^3$$

wieder, welche in der Untersuchung über die Gleichung der Quadrate der Differenzen Art. 19, p. 166 gefunden wurden und erkennt die dort gegebene Deutung dieser Relationen als richtig.

Für die Voraussetzung von drei gleichen Wurzeln

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

also die Form

$$a_0 (x - \alpha_1 y)^3 (x - \alpha_4 y),$$

werden beide fundamentale Invarianten nebst der Discriminante gleich Null; in jedem Falle kann also die Existenz von vier gleichen Wurzeln nicht an dem Verschwinden der drei Invarianten allein, sondern nur durch die gleichzeitige Betrachtung der Covarianten erkannt werden. Aber auch für die Fälle von zwei mal zwei und von drei gleichen Wurzeln liefern diese präcisere Bedingungen als jene allein.

Von ihnen ist auch die Abrundung der die neuere Geometrie betreffenden Ergebnisse zu erwarten.

Es existieren zwei unabhängige Covarianten der biquadratischen Form, deren eine, die Hesse'sche Covariante, vom zweiten Grad in den Coefficienten und vom vierten in den Veränderlichen der Form ist, die andere aber vom dritten Grade in jenen und vom sechsten in diesen.

Jene wird durch das Symbol

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{d^2}{dx\,dy}\right)^2,$$

erhalten*) und ist

$$C_{4,4} = (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 y + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x^2 y^2$$
$$+ 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x y^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) y^4.$$

Man kann sie auch aus der cubischen Invariante $J_{4,3}$ ableiten. Ihr Ausdruck in Gliedern der Wurzeln ist

---

*) Oder auch durch die in der Note p. 192 angegebene Methode aus der ersten Sturm'schen Constanten abgeleitet.

$$C_{4,4} = -\frac{a_0^2}{48}\Big\{(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3 y)^2(x-\alpha_4 y)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2(x-\alpha_2 y)^2(x-\alpha_4 y)^2$$
$$+(\alpha_1-\alpha_4)^2(x-\alpha_2 y)^2(x-\alpha_3 y)^2+(\alpha_2-\alpha_3)^2(x-\alpha_1 y)^2(x-\alpha_4 y)^2$$
$$+(\alpha_2-\alpha_4)^2(x-\alpha_1 y)^2(x-\alpha_3 y)^2+(\alpha_3-\alpha_4)^2(x-\alpha_1 y)^2(x-\alpha_2 y)^2\Big\}$$
$$= -\frac{a_0^2}{48}\,\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^2\,(x-\alpha_1 y)^2\,(x-\alpha_4 y)^2.$$

Daraus ersieht man zunächst, dass sie für zwei Paare von gleichen Wurzeln

$$\alpha_1 = \alpha_2\,,\quad \alpha_3 = \alpha_4$$

die Gestalt

$$C_{4,4} = -\frac{a_0^2}{12}\,(\alpha_1-\alpha_3)^2\,(x-\alpha_1 y)^2\,(x-\alpha_3 y)^2$$

annimmt, welche mit den oben bemerkten Specialitäten für diesen Fall die characteristische Relation giebt

$$2\,J_{4,2}\,.\,C_{4,4} = 3\,J_{4,3}\,.\,U,$$

die leicht zu bewähren ist.

Ihr identisches Verschwinden erfordert und bedingt nach dem Ausdruck in Function der Wurzeln, der von ihr gegeben ist, die Gleichheit aller vier Wurzeln der Gleichung.

Von grösserer Bedeutung für die gegenwärtige Entwickelung ist aber die Covariante der biquadratischen Form vom sechsten Grade in den Veränderlichen und vom dritten in den Coefficienten. Sie darf in der Form

$$c_0 x^6 + 6 c_1 x^5 y + 15 c_2 x^4 y^2 + 20 c_3 x^3 y^3 + 15 c_4 x^2 y^4 + 6 c_5 x y^5 + c_6 y^6$$

geschrieben werden, und da nach dem Gesetze des Gewichts der Glieder den in $a_0, a_1, \ldots$ cubischen Coefficienten $c_0, c_1, \ldots c_6$ respective die Gewichte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zukommen, so hat man ihre litteralen Formen

$$c_0 = a_0^2 a_3 + A\,a_0 a_1 a_2 + B\,a_1^3,$$
$$6\,c_1 = a_0^2 a_4 + C\,a_0 a_1 a_3 + D\,a_0 a_2^2 + E\,a_1^2 a_2,$$
$$15\,c_2 = F a_0 a_1 a_4 + G\,a_0 a_2 a_3 + H a_1^2 a_3,$$
$$20\,c_3 = I\,a_0 a_3^2 + K a_0 a_2 a_4 + L\,a_2^3 + M a_1^2 a_4 + N a_1 a_2 a_3,\ \text{etc.}$$

— man kann die übrigen Ausdrücke zu schreiben unterlassen, denn sie gehen nach den Ergebnissen des 21. Artikels aus den vorigen hervor — und erhält die Differentialgleichungen

$$A a_0^2 a_2 + 3 B a_0 a_1^2 + 2 A a_0 a_1^2 + 3 a_0^2 a_2 = 0,$$
$$\text{d. i. } A = -3, \; B = +2;$$
$$a_0(C a_0 a_3 + 2 E a_1 a_2) + 2 a_1 (2 D a_0 a_2 + E a_1^2) + 3 C a_0 a_1 a_2$$
$$= 6(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3),$$
oder
$$C = +2, \; D = -9, \; E = +6;$$
$$a_0(F a_0 a_4 + 2 H a_1 a_3) + 2 G a_0 a_1 a_2 a_3 + 3 a_2 (G a_0 a_2 + H a_1^2) + 4 F a_0 a_1 a_3$$
$$= 5(a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2),$$
oder
$$F = +5, \; G = -15, \; H = +10;$$
$$a_0(2 M a_1 a_4 + N a_2 a_3) + 2 a_1 (K a_0 a_4 + 3 L a_2^2 + N a_1 a_3) + 3 a_2 (2 I a_0 a_3 + 3 N a_1 a_2)$$
$$+ 4 a_3 (K a_0 a_2 + M a_1^2) = 4(5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3),$$
oder
$$I = -10, \; K = L = N = 0, \; M = +10,$$
und damit die Werthe
$$c_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3,$$
$$6 c_1 = a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2,$$
$$15 c_2 = 5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3,$$
$$20 c_3 = -10 a_0 a_3^2 + 10 a_1^2 a_4;$$
somit durch Vertauschung der Indices wie Art. 21 p. 184
$$c_6 = - a_1 a_4^2 + 3 a_2 a_3 a_4 - 2 a_3^3,$$
$$6 c_5 = - a_0 a_4^2 - 2 a_1 a_3 a_4 + 9 a_2^2 a_4 - 6 a_2 a_3^2,$$
$$15 c_4 = - 5 a_0 a_3 a_4 + 15 a_1 a_2 a_4 + 10 a_1 a_3^2,$$
indess $20 c_3$ durch dieselbe Vertauschung in sich selbst verkehrt wird. Man hat demnach
$$C_{4,6} = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^6 + (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x^5 y$$
$$+ (5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3) x^4 y^2 + (10 a_1^2 a_4 - 10 a_0 a_3^2) x^3 y^3$$
$$+ (15 a_1 a_2 a_4 - 5 a_0 a_3 a_4 - 10 a_1 a_3^2) x^2 y^4$$
$$+ (9 a_2^2 a_4 - a_0 a_4^2 - 2 a_1 a_3 a_4 - 6 a_2 a_3^2) x y^5 + (3 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2 a_3^3) y^6.$$

Cayley hat von ihr angemerkt, dass sie auch erhalten werden kann, indem man die biquadratische Form in der Gestalt einer cubischen
$$(a_0 x + a_1 y) x^3 + 3 (a_1 x + a_2 y) x^2 y + 3 (a_2 x + a_3 y) x y^2 + (a_3 x + a_4 y) y^3$$
mit veränderlichen Coefficienten darstellt und von dieser, unter Behandlung dieser Coefficienten als constanter Grössen, die cubische Invariante bildet; sie ist die Covariante $C_{4,6}$.

Wenn man sie in der Gestalt
$$(c_0, c_1, c_2, \ldots c_6 \between x, y)^6$$
schreibt, so finden, wie Cayley und Salmon gefunden haben, unter den Coefficienten die folgenden Relationen statt:

$$c_0 c_6 - 9 c_2 c_4 + 8 c_3^2 = 0,$$

$$c_0 c_6 - 6 c_1 c_5 + 15 c_2 c_4 - 10 c_3^2 = \frac{D_4}{6}.$$

(Links steht die quadratische Invariante der Form des sechsten Grades.)

Daraus folgt

$$c_1 c_5 - 4 c_2 c_4 + 3 c_3^2 = -\frac{D_4}{36},$$

und man hat ferner

$$c_0 c_5 - 3 c_1 c_4 + 2 c_2 c_3 = 0,$$
$$c_1 c_6 - 3 c_2 c_5 + 2 c_3 c_4 = 0.$$

Durch die schon bei den Invarianten benutzte Reduction der biquadratischen Form

$$a_0 = a_4 = 1, \quad a_1 = a_3 = 0$$

wird

$$C_{4,6} = (1 - 9 a_2^2) x^5 y + (9 a_2^2 - 1) x y^5 = (1 - 9 a_2^2)(x^4 - y^4) x y,$$
$$C_{4,4} = a_2 x^4 + (1 - 3 a_2^2) x^2 y^2 + a_2 y^4 = a_2 (x^4 + y^4) + (1 - 3 a_2^2) x^2 y^2.$$

Erinnert man dabei die ebenso reducierten Werthe der Invarianten

$$J_{4,2} = 1 + 3 a_2^2, \quad J_{4,3} = a_2 (1 - a_2^2),$$
$$D_4 = (1 - 9 a_2^2)^2,$$

und bezeichnet die biquadratische reducierte Form selbst

$$x^4 + 6 a_2 x^2 y^2 + y^4$$

durch U, so kann die Relation bestätigt werden

$$C_{4,6}^2 + 4 C_{4,4}^3 + J_{4,3} U^3 = J_{4,2} C_{4,4} U^2,$$

welche die fundamentalen Covarianten mit den Invarianten verbindet; denn sie ist

$$(1 - 9 a_2^2)^2 (x^4 - y^4)^2 x^2 y^2 + 4 \{ a_2 (x^4 + y^4) + (1 - 3 a_2^2) x^2 y^2 \}^3$$
$$+ a_2 (1 - a_2^2)(x^4 + 6 a_2 x^2 y^2 + y^4)^3 =$$
$$(1 + 3 a_2^2) \{ a_2 (x^4 + y^4) + (1 - 3 a_2^2) x^2 y^2 \} (x^4 + 6 a_2 x^2 y^2 + y^4)^2.$$

An diese Relation hat Cayley die Auflösung der biquadratischen Gleichung, d. h. die Bestimmung ihrer linearen Factoren geknüpft. Die Relation

$$J_{4,3} U^3 - J_{4,2} C_{4,4} U^2 + 4 C_{4,4}^3 = - C_{4,6}^2$$

erhält für die Abkürzung

$$\frac{J_{4,2}^3}{4 J_{4,3}^3} = M$$

die neue Form

$$(1,\ 0,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M \between J_{4,2}C_{4,4},\ J_{4,3}U)^3 = -\tfrac{1}{4}J_{4,2}^{\,3}C_{4,6}^{\,2}.$$

Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln von

$$(1,\ 0,\ -\tfrac{1}{3}M,\ M \between \lambda,\ 1)^3 = 0,$$

so sind die Ausdrücke

$$J_{4,2}C_{4,4} - \lambda_1 J_{4,3}U,$$
$$J_{4,2}C_{4,4} - \lambda_2 J_{4,3}U,$$
$$J_{4,3}C_{4,4} - \lambda_3 J_{4,3}U$$

Quadrate und wenn man setzt

$$(\lambda_2-\lambda_3)(J_{4,2}C_{4,4} - \lambda_1 J_{4,3}U) = X^2,$$
$$(\lambda_3-\lambda_1)(J_{4,2}C_{4,4} - \lambda_2 J_{4,3}U) = Y^2,$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)(J_{4,2}C_{4,4} - \lambda_3 J_{4,2}U) = Z^2,$$

wofür

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

ist und also

$$X + kY,\quad X - kY$$

vollständige Quadrate sind, so ist der Ausdruck

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

auch ein Quadrat, wenn die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

erfüllt ist, denn man kann ihn in der Form

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta k)(X-kY) + \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta k)(X+kY) - \gamma\sqrt{-(X^2+Y^2)}$$

schreiben. Setzt man nun

$$\alpha = \sqrt{\lambda_2-\lambda_3},\quad \beta = \sqrt{\lambda_3-\lambda_1},\quad \gamma = \sqrt{\lambda_1-\lambda_2},$$

welche Werthe die vorgeschriebene Bedingung erfüllen, so geht der Ausdruck

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

in

$$(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4}-\lambda_1 J_{4,3}U} + (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4}-\lambda_2 J_{4,3}U}$$
$$+ (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{J_{4,2}C_{4,4}-\lambda_3 J_{4,3}U}$$

über. Da derselbe aber zugleich für $U = 0$ identisch verschwindet, das Product seiner verschiedenen Werthe also ein vielfaches von U^2 ist, so repräsentiert er das Quadrat eines linearen Factors der biquadratischen Gleichung.*)

In Function der Wurzeln ausgedrückt erhält die Covariante $C_{4,6}$ folgende Gestalt:

---

*) Man vergleiche damit die Darstellung der Auflösung der biquadratischen Gleichung von Hermite im 52. Bande von „Crelle's Journal", p. 4.

$$C_{4,6} = -\frac{a_0^3}{32}\Big\{(\alpha_4+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,x^2+2\,(\alpha_2\,\alpha_3-\alpha_4\,\alpha_1)\,x\,y$$
$$+\,[\alpha_4\,\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)-\alpha_2\,\alpha_3(\alpha_1+\alpha_4)]\,y^2\Big\}\times$$
$$\Big\{(\alpha_4+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1)\,x^2+2\,(\alpha_3\,\alpha_1-\alpha_4\,\alpha_2)\,x\,y$$
$$+\,[\alpha_4\,\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)-\alpha_3\,\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4)]\,y^2\Big\}\times$$
$$\Big\{(\alpha_4+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)\,x^2+2\,(\alpha_1\,\alpha_2-\alpha_3\,\alpha_4)\,x\,y$$
$$+\,[\alpha_4\,\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)]\,y^2\Big\}.$$

Aus der Anschauung derselben ergiebt sich leicht das folgende wichtige Gesetz: W e n n v o n d e n d u r c h d i e v i e r l i n e a r e n F a c t o r e n d e r b i q u a d r a t i s c h e n F o r m d a r g e s t e l l t e n E l e m e n t e n i r g e n d z w e i a l s m i t d e n a n d e r e n e i n e I n v o l u t i o n b i l d e n d a n g e s e h e n w e r - d e n , s o s i n d d i e s i c h s e l b s t c o n j u g i e r t e n E l e m e n t e d i e s e r I n v o l u t i o n d u r c h e i n e n d e r q u a d r a t i s c h e n F a c t o r e n d e r C o v a r i a n t e $C_{4,6}$ b e s t i m m t.

In der That, wenn die Punktepaare

$$(x-\alpha_1\,y)\,(x-\alpha_2\,y)=0,$$
$$(x-\alpha_3\,y)\,(x-\alpha_4\,y)=0,$$

oder

$$x^2-(\alpha_1+\alpha_2)\,x\,y+\alpha_1\,\alpha_2\,y^2=0,$$
$$x^2-(\alpha_3+\alpha_4)\,x\,y+\alpha_3\,\alpha_4\,y^2=0$$

eine Involution bilden, so ist die J a c o b i'sche Determinante derselben der analytische Ausdruck der Doppelpunkte dieser Letzteren, d. i.

$$-\,x^2\left(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)+x\,y\,(\alpha_3\,\alpha_4-\alpha_1\,\alpha_2)$$
$$-\,y^2\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,\alpha_3\,\alpha_4-\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\,\alpha_1\,\alpha_2\right)$$

oder

$$x^2\,(\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2)+2\,(\alpha_1\,\alpha_2-\alpha_3\,\alpha_4)\,x\,y+[\alpha_3\,\alpha_4\,(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\,\alpha_2\,(\alpha_3+\alpha_4)]\,y^2,$$

der letzte unter den quadratischen Factoren der Covariante $C_{4,6}$.

Ebenso ergiebt sich für die Punktepaare

$$(x-\alpha_1\,y)\,(x-\alpha_3\,y)=x^2-(\alpha_1+\alpha_3)\,x\,y+\alpha_1\,\alpha_3\,y^2=0,$$
$$(x-\alpha_2\,y)\,(x-\alpha_4\,y)=x^2-(\alpha_2+\alpha_4)\,x\,y+\alpha_2\,\alpha_4\,y^2=0$$

die Gleichung der Doppelpunkte in der Form

$$x^2(\alpha_2+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_3)+2(\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4)xy$$
$$+[\alpha_2\alpha_4(\alpha_1+\alpha_3)-\alpha_1\alpha_3(\alpha_2+\alpha_4)]y^2=0,$$

d. h. identisch mit dem zweiten quadratischen Factor der Covariante; es ist überflüssig, denselben Nachweis auch noch für den ersten dieser Factoren zu führen.

Endlich lassen sich aber dieselben Betrachtungen auf die quadratischen Factoren dieser Covariante selbst anwenden. Sind die beiden ersten durch

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2,\quad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2$$

respective dargestellt, so liefert ihre Jacobi'sche Determinante

$$(AB_1-A_1B)x^2+(AC_1-A_1C)xy+(BC_1-B_1C)y^2$$

den Ausdruck der Doppelpunkte der durch sie selbst bestimmten Involution in der Form

$$(\alpha_4+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)x^2+2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)xy$$
$$+[\alpha_4\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)]y^2=0;$$

denn man hat

$$AB_1-A_1B=(\alpha_4+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3\alpha_1-\alpha_4\alpha_2)-(\alpha_4+\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_1)=$$
$$(\alpha_4+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)[\alpha_4(\alpha_1-\alpha_2)-\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)]=$$
$$(\alpha_4+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3);$$
$$AC_1-A_1C=(\alpha_4+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)[\alpha_4\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)-\alpha_3\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4)]$$
$$-(\alpha_4+\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3)[\alpha_4\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)-\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_4)]$$
$$=2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3);$$
$$BC_1-B_1C=(\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_1)[\alpha_4\alpha_2(\alpha_3+\alpha_1)-\alpha_3\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4)]$$
$$-(\alpha_3\alpha_1-\alpha_4\alpha_2)[\alpha_4\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)-\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_4)]$$
$$=[\alpha_4\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)](\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3).$$

Als Ausdruck dieser Entwickelung gilt das Gesetz: Irgend zwei quadratische Factoren der Covariante $C_{4,6}$ bestimmen mit einander eine Involution, für welche der dritte quadratische Factor derselben Covariante das Paar der sich selbst conjugierten Elemente bezeichnet.

Und hier kann nun auch die Frage nach den möglichen Gleichheiten unter den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung abschliessend erörtert werden, so wie diess für die Fälle von zwei gleichen Wurzeln und von drei und vier gleichen Wurzeln durch die Betrachtung der Discriminante der beiden Invarianten $J_{4,2}$, $J_{4,3}$ und der Hesse'schen Covariante schon geschehen ist. Es erübrigt

die Erledigung des **Falles von zwei Paaren gleicher Wurzeln**; man hat aber für

$$\alpha_1 = \alpha_2, \ \alpha_3 = \alpha_4$$

die Covariante

$$C_{4,6} = 0,$$

so dass diess die characteristische Relation dieses Falles ist.

Diess findet Alles seine geometrische Erläuterung in den vorhergehenden Erörterungen über die Bedeutung der beiden Covarianten der biquadratischen Form.

Cayley hat nachgewiesen,*) dass die möglichen Gleichheiten unter den fünf Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grade ebenfalls durch das identische Verschwinden symmetrischer Functionen der Wurzeln und Functionen der Wurzeldifferenzen characterisiert sind, welche mit den Invarianten und Covarianten derselben übereinstimmen. Wenn die Formen des fünften und der höheren Grade auch hier keine eingehendere Behandlung erfahren können, so soll wenigstens durch Anführung der entsprechenden Resultate ein Ueberblick über die in ihrer Theorie auftretenden Formen und die Anregung zur Berechnung der hauptsächlichsten unter ihnen gegeben werden.

Die Gleichung fünften Grades besitzt **ein Paar gleicher Wurzeln**, wenn ihre Discriminante D_5 verschwindet.

Von ihr ist am Schlusse des 21. Artikels gezeigt, dass sie aus den beiden Invarianten des vierten und achten Grades in den Coefficienten hervorgeht.

Die Gleichung hat **vier gleiche Wurzeln**, wenn die in den Coefficienten und Veränderlichen der Form quadratische Covariante gleich Null ist, deren Typus durch

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (x - \alpha_5 y)^2$$

dargestellt wird.

Fünf gleiche Wurzeln existieren, wenn die Hesse'sche Covariante der Form, welche vom sechsten Grade in den Veränderlichen und vom zweiten in den Coefficienten ist, verschwindet; ihr Typus ist

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 (x - \alpha_4 y)^2 (x - \alpha_5 y)^2.$$

Beide eben angeführte sind fundamentale Covarianten der Form $(C_{5,2,2}, C_{5,6,2})$.

*) „Philosoph. Transactions", Vol. 147, p. 727.

Die Existenz von zwei Paaren gleicher Wurzeln wird bedingt durch das Verschwinden einer Covariante vom Typus

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_4-\alpha_5)^2$$
$$(x-\alpha_1 y)^3(x-\alpha_2 y)^3(x-\alpha_3 y)^3$$

welche vom fünften Grade in den Coefficienten und vom neunten in den Veränderlichen der Form ist. Sie gehört nicht zu den fundamentalen Covarianten, sondern sie ist eine Summe der Producte aus vier anderen Covarianten und der Form selbst. Ist diese U und bezeichnet man die Covarianten durch den Zusatz ihres Grades in den Veränderlichen im Index, welchem nach überdiess ihr Grad in den Coefficienten beigefügt werden kann, so sind diese drei Producte, als deren Summe die bezeichnete Covariante $C_{5,9,5}$ erhalten wird,

$$U\,.\,C_{5,4,4}\,,\quad U\,.\,C_{5,2,2}^2,\quad C_{5,6,2}\,.\,C_{5,3,3}.$$

Drei gleiche Wurzeln entsprechen der Form, wenn die Invariante vom vierten Grade $J_{5,4}$ verschwindet, deren Typus

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1^2)(\alpha_4-\alpha_5)^4$$

ist; oder auch wenn die Covariante, deren Typus durch

$$\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_4-\alpha_5)^2(x-\alpha_4 y)^2(x-\alpha_5 y)^2$$

bezeichnet ist, und die als eine Summe aus der Covariante $C_{5,4,4}$ und dem Quadrate der Covariante $C_{5,2,2}$ erhalten wird.

Endlich sind drei gleiche Wurzeln und überdiess zwei andere gleiche Wurzeln vorhanden, wenn eine Covariante vom Typus

$$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)(x-\alpha_2 y)^3(x-\alpha_3 y)^3(x-\alpha_4 y)^3(x-\alpha_5 y)^3$$

verschwindet, welche aus den Producten

$$U^2\,.\,C_{5,2,2}\ \text{und}\ C_{5,6,2}^2$$

additiv zusammengesetzt werden kann und also vom vierten Grade in den Coefficienten und vom zwölften in den Veränderlichen der Form ist.*) Man kann sie und die Vorigen leicht nach den vorgetragenen allgemeinen Gesetzen berechnen.

---

*) Alle diese Formen und andere sind in Function der Coefficienten entwickelt in Cayley's „Second Memoir upon Quantics“ „Philos. Trans.“ 1855, p. 123 f. und „Third Memoir“ ebenda, p. 627 f.

24.

Wenn in dem Vorhergehenden die allgemeinen Grundlagen der neueren Geometrie als a priori aus der algebraischen Theorie der binären Formen hervorgehend nachgewiesen sind, so mag zur Vervollständigung dessen noch der Nachweis des analytischen Ursprungs der metrischen Relationen hinzugefügt werden.*) Er muss sich, um vollständig zu sein, zugleich auf die Geometrie von zwei Dimensionen oder auf die ternären Formen mitbeziehen; man stellt damit zugleich die Grundlagen der allgemeinen Theorie der Metrik im Raume fest.

Die Theorie knüpft sich an das analytische Factum, dass in Bezug auf ein gegebenes festes Elementenpaar

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 0$$

die Gleichung eines beliebigen anderen Paares von Elementen desselben Gebildes in doppelter Weise in der Form

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 + (lx + my)^2 = 0$$

dargestellt werden kann, wobei die durch die beiden Werthe von

$$lx + my = 0$$

dargestellten Elemente die sich selbst conjugierten Elemente der durch beide Punktepaare bestimmten Involution sind. Das Paar der Elemente

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y) + (lx + my)^2 = 0$$

soll dem Paar

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 0$$

eingeschrieben heissen und die beiden sich selbst conjugierten Elemente der Involution als Achse und Centrum der Einschreibung bezeichnet werden.

Die Gleichung des eingeschriebenen Punktepaares**) kann, je nachdem

$$xy' - x'y = 0$$

die Gleichung der Achse und

---

*) Cayley hat in seinem „Sixth Memoir upon Quantics" „Philos. Trans." Vol. 149 (1859) die Theorie aufgestellt, die wir hier vortragen.

**) Das Wort Punkte ist für das allgemeinere Wort Elemente gebraucht.

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y') = 0,$$

d. i.

$$a_0 x x' + a_1 (x y' + x' y) + a_2 y y' = 0$$

die Gleichung des Centrums der Einschreibung (x', y' sind Constanten) oder umgekehrt

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y') = 0$$

die Gleichung der Achse und

$$x y' - x' y = 0$$

die Gleichung des Centrums ist, in den beiden äquivalenten Formen respective geschrieben werden:

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 \sin^2 \Theta - (a_0 a_2 - a_1^2)(x y' - x' y)^2 = 0,$$

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 \cos^2 \Theta - \{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')\}^2 = 0$$

geschrieben werden; äquivalent weil

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 - \{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')\}^2$$
$$= (a_0 a_2 - a_1^2)(x y' - x' y)^2$$

eine identische Gleichung ist.*)

Setzt man abkürzend

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 00,$$
$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y') = 01 = 10,$$

so kann man dieselbe Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} 00, & 01 \\ 10, & 11 \end{vmatrix} = (a_0 a_2 - a_1^2) \begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}^2$$

schreiben. Für drei Reihen

$$x, y; \; x', y'; \; x'', y''$$

verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung und man bildet die Relation

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = 0,$$

welche auch in der Form

$$\cos^{-1} \frac{01}{\sqrt{00}\sqrt{11}} + \cos^{-1} \frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{12}} = \cos^{-1} \frac{02}{\sqrt{00}\sqrt{22}}$$

geschrieben werden kann.

---

*) Sie ist in der That nichts Anderes als der Ausdruck der Invarianz der Discriminante der quadratischen Form

$$(a_0, a_1, a_2 \between \Xi, \Upsilon)^2 = (a_0', a_1', a_2' \between \xi, \eta)^2$$

bei der Transformation

$$\Xi = x \xi + x' \eta,$$
$$\Upsilon = y \xi + y' \eta;$$

nämlich

$$a_0' a_2' - a_1'^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)(x y' - x' y)^2.$$

Sei nun unter den Elementen eines geometrischen Gebildes erster Stufe ein Paar als unveränderlich und unabhängig, als *absolut*, betrachtet, so dass alle übrigen Paare von Elementen als ihm eingeschrieben angesehen werden können, und mit ihm ein Centrum und eine Achse der Einschreibung, die sich selbst conjugierten Punkte der durch beide Paare bestimmten Involution, — nach ihrem Begriff stets das absolute Paar harmonisch theilend — bestimmen, so soll ein solches Paar von Elementen, insofern es als jenem eingeschrieben betrachtet wird, ein *Kreispaar* oder kürzer ein *Kreis* genannt werden. Das Centrum und die Achse der Einschreibung, die Doppelelemente der Involution, die es mit dem absoluten Paar bestimmt, heissen sein *Centrum* und seine *Achse*; für dieselbe Betrachtung muss immer das Nämliche von beiden als Centrum festgehalten werden. Dann lässt sich aus dem Centrum und dem einen Elemente des Kreispaares stets das andere in einziger Weise bestimmen, weil zunächst die Achse das conjugierte harmonische Element des Centrums in Bezug auf das absolute Paar und sodann das andere Element des Kreispaares das conjugierte harmonische des ersten in Bezug auf Centrum und Achse ist.

Dann steht als eine Definition der Satz: *Die zwei Elemente eines Kreispaares sind äquidistant vom Centrum.*

Sind nun P, P' zwei Elemente, und ein drittes P'' so bestimmt, dass P, P'' ein Kreispaar vom Centrum P' bilden; P''' sodann so, dass P', P''' ein Kreispaar vom Centrum P'', P'''' so, dass P'', P'''' ein Kreispaar vom Centrum P''' wird etc., und ferner im entgegengesetzten Sinne ein Element $P^{\backprime}$ so, dass P', $P^{\backprime}$ ein Kreispaar vom Centrum P ist, $P^{\backprime\backprime}$ ferner so, dass P, $P^{\backprime\backprime}$ ein Kreispaar vom Centrum $P^{\backprime}$ etc., so bestimmen die Elemente der Reihe $P^{\backprime\backprime\backprime}, P^{\backprime\backprime}, P^{\backprime}, P, P', P'', P''', \ldots$ jedes mit seinen benachbarten gleiche Distanzen und wenn die Elemente P, P' einander unendlich nahe gedacht werden, *so wird das ganze Feld des Elementargebildes in eine Reihe von unendlich kleinen gleichen Elementen getheilt; die Zahl derselben, welche zwi-*

schen irgend zwei Elementen des Gebildes eingeschlossen ist, misst die Entfernung derselben.

Offenbar hat man für drei geordnet genommene Elemente P, P', P'' die Gleichung

$$\textit{Dist.}\,(P, P') + \textit{Dist.}\,(P', P'') = \textit{Dist.}\,(P, P''),$$

welche mit dem gewöhnlichen Begriff der Entfernung übereinstimmt.

Daraus entspringt der analytische Ausdruck der Entfernung zweier Elemente in Function der Coordinaten nach dem Vorigen sehr einfach.

Sei das Paar dargestellt durch

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 = 0,$$

so ist die Gleichung des Kreispaares, welches das Element (x', y') zum Centrum hat

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 \cos^2 \Theta - \{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')\}^2 = 0,$$

und wenn (x, y), (x'', y'') die zwei Elemente desselben sind, so hat man

$$\frac{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')}{\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2} \cdot \sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2}} = \frac{(a_0, a_1, a_2 \between x', y' \between x'', y'')}{\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2}\,\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x'', y'')^2}},$$

welches ausdrückt, dass (x'', y'') und (x, y) von (x', y') (dem Centrum) gleich weit entfernt sind.

Die Distanz der Elemente (x, y) und (x', y') ist dann nothwendig eine Function von

$$\frac{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')}{\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2}\,\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2}},$$

deren Form sich aus der Forderung bestimmt, dass für die drei geordneten Elemente

$$P, P', P''$$

die Gleichung

$$\textit{Dist.}\,(P, P') + \textit{Dist.}\,(P', P'') = \textit{Dist.}\,(P, P'')$$

erfüllt sein muss. Man ist damit durch das Frühere zu dem Schlusse geleitet, dass die Distanz von (x, y), (x', y') das Vielfache eines Bogens sei, der den letzterhaltenen Ausdruck zu seinem cosinus hat, und darf festsetzen, dass sie ihm gleich sei, d. h. die Entfernung von (x, y) (x', y')

$$= \cos^{-1} \frac{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')}{\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2} \sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2}}$$

oder, was dasselbe ist

$$= \sin^{-1} \frac{(a_0 a_2 - a_1^2 \between x y' - x' y)}{\sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2} \sqrt{(a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2}}.$$

Dann drücken auch die beiden Formen der Gleichung des Kreispaares

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 \cos^2 \Theta - \{(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y')\}^2 = 0,$$
$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y)^2 (a_0, a_1, a_2 \between x', y')^2 \sin^2 \Theta - (a_0 a_2 - a_1^2)(x y' - x' y) = 0$$

gleichmässig aus, dass die Entfernungen seiner beiden Elemente vom Centrum dem Bogen Θ respective gleich sind, oder wenn man will, dass Θ der Radius des Kreises ist.

Für $\Theta = 0$ ist

$$x y' - x' y = 0,$$

d. h. die Elemente (x, y), (x', y') fallen zusammen; für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ist

$$(a_0, a_1, a_2 \between x, y \between x', y') = 0,$$

d. h. die Elemente (x, y) und (x', y') bestimmen mit dem absoluten Paar eine harmonische Theilung. Die Distanz zwischen zwei Elementen, die in Bezug auf das absolute Paar conjugiert harmonisch sind, ist ein Quadrant; solche Elemente können quadrantal oder rectangulär heissen.*)

Wenn das absolute Paar speciell ein Paar zusammenfallender Elemente ist, so fallen die conjugiert harmonischen aller Elemente mit dem absoluten selbst zusammen; die Definition eines Kreispaares wird dann dahin vereinfacht, dass jedes Elementenpaar ein Kreispaar ist, welches das conjugiert harmonische des absoluten Elements in Bezug auf das gegebene Paar zum Centrum hat. Das Feld des Elementargebildes kann wie vorher in eine Reihe unendlich kleiner gleicher Elemente getheilt werden und die Entfernung irgend zweier Elemente wird gemessen durch die Zahl solcher un-

---

*) Vergl. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 448.

endlich kleiner Elemente, welche zwischen ihnen liegt. Hinsichtlich des analytischen Ausdrucks ist wegen

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0$$

die Distanz als Bogen von verschwindendem sinus gegeben; man bildet ihren endlichen Ausdruck, wenn man diesen auf seinen sinus reduciert und den verschwindenden Factor unterdrückt.

Ist (p, q) das absolute Element, d. i.

$$(qx - py)^2 = 0,$$

so ist die Distanz von (x, y) und (x', y')

$$= \frac{xy' - x'y}{(qx - py)(qx' - py')},$$

oder durch Einführung eines constanten Factors

$$\frac{(q\alpha - p\beta)(xy' - x'y)}{(qx - py)(qx' - py')},$$

d. i.

$$\frac{\beta x - \alpha y}{qx - py} - \frac{\beta x' - \alpha y'}{qx' - py'}.$$

In diesem Falle verschwindet der Begriff der rectangulären Beziehung zweier Elemente, und die Einheit der Distanz ist willkürlich.

25.

Ihre vollere Ausgestaltung erhält aber diese Theorie erst in der Betrachtung der ebenen zusammengesetzten Gebilde oder in der der ternären homogenen Formen; bei ihrer Darstellung mag erlaubt sein, auf die Entwickelungen des Werkes „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ zur Begründung alles dessen zu verweisen, was hier vorausgesetzt werden muss. Sei

$$(a, a', a'', b, b', b'' \between x, y, z)^2 = 0$$

d. i.

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten, so kann die Polare des Punktes (x', y', z') durch

$$(a, a', a'', b, b', b'' \between x, y, z \between x', y', z') = 0$$

dargestellt werden.*)

*) Vergl. a. a. O. Art. 328 (400), 331.

Man hat alsdann

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \between \xi, \eta, \zeta)^2 = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A} = a'a'' - b^2, \quad \mathfrak{A}' = a''a - b'^2, \quad \mathfrak{A}'' = aa' - b''^2,$$
$$\mathfrak{B} = b'b'' - ab, \quad \mathfrak{B}' = b''b - a'b', \quad \mathfrak{B}'' = bb' - a''b'',\text{*)}$$

als Gleichung desselben Kegelschnitts in Liniencoordinaten und für die Gleichung des Pols der Geraden (ξ', η', ζ')

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \between \xi, \eta, \zeta \between \xi', \eta', \zeta') = 0,$$

so dass die Punktcoordinaten des Pols sind

$$\mathfrak{A}\xi' + \mathfrak{B}''\eta' + \mathfrak{B}'\zeta', \quad \mathfrak{B}''\xi' + \mathfrak{A}'\eta' + \mathfrak{B}\zeta', \quad \mathfrak{B}'\xi' + \mathfrak{B}\eta' + \mathfrak{A}''\zeta'.$$

Setzt man

$$D = aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 + 2bb'b'',\text{**)}$$

so ist

$$D^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}''^2 + 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'',$$

und ferner

$$\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}''b'' + \mathfrak{B}'b' = D, \quad \mathfrak{B}''a + \mathfrak{A}'b'' + \mathfrak{B}b' = 0,$$
$$\mathfrak{A}b'' + \mathfrak{B}''a' + \mathfrak{B}'b = 0, \quad \mathfrak{B}''b'' + \mathfrak{A}'a' + \mathfrak{B}b = D,$$
$$\mathfrak{A}b' + \mathfrak{B}''b + \mathfrak{B}'a'' = 0, \quad \mathfrak{B}''b' + \mathfrak{A}'b + \mathfrak{B}a'' = 0,$$
$$\mathfrak{B}'a + \mathfrak{B}b'' + \mathfrak{A}''b' = 0,$$
$$\mathfrak{B}'b'' + \mathfrak{B}a' + \mathfrak{A}''b = 0,$$
$$\mathfrak{B}'b' + \mathfrak{B}b + \mathfrak{A}''a'' = D,$$
$$Da = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}^2, \quad Db = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$Da' = \mathfrak{A}''\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'^2, \quad Db' = \mathfrak{B}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}',$$
$$Da'' = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}''^2, \quad Db'' = \mathfrak{B}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}''.$$

Ist dann

$$S = 0, \quad \Sigma = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, respective in Punkt- und Liniencoordinaten, so repräsentiert

$$S + kL^2 = 0, \quad \Sigma + \varkappa\Lambda^2 = 0$$

respective die Gleichung eines zweiten Kegelschnitts in Punkt- oder in Liniencoordinaten, welcher mit dem ersten eine doppelte Berührung hat; im ersten Falle bestimmen die gemeinschaftlichen Elemente (Punkte) eine gerade Linie

$$L = 0,$$

welche in Bezug auf beide Kegelschnitte denselben Pol be-

---

*) Vergl. a. a. O. Art. 400.

**) Vergl. a. a. O. Art. 360 u. a.

sitzt; im zweiten bestimmen sie — es sind die gemeinschaftlichen Tangenten — einen Punkt

$$\Delta = 0,$$

welcher in Bezug auf beide Kegelschnitte eine und dieselbe Polare hat.*) Dieser Pol und diese Polare mögen als **Centrum** und **als Achse der Einschreibung** benannt werden, als welche die Beziehung beider Kegelschnitte auf einander zu bezeichnen gestattet ist.

Ist

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0$$

die Gleichung der Achse, so ist die Gleichung des Centrums der Einschreibung in Liniencoordinaten demnach

$$\Delta = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta') = 0.$$

Die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts ist zuerst

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi, \eta, \xi)^2 + k(a, a', \dots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta, \zeta\xi' - \zeta'\xi, \xi\eta' - \xi'\eta)^2 = 0,$$

und wird wegen der Identität

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 - \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2$$
$$= D(a, a', \dots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta, \zeta\xi' - \zeta'\xi, \xi\eta' - \xi'\eta)^2 \text{**)}$$

zu

$$[D + k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2] (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi, \eta, \zeta)^2$$
$$- k\{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')(\xi, \eta, \zeta)\}^2 = 0.$$

Sind anderseits (x', y', z') die Punktcoordinaten des Centrum der Einschreibung, so ist

$$(a, a', a'', b, b', b'')(x, y, z)(x', y', z') = 0$$

die Gleichung der Achse. Man kann die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts in der Form

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2 (a, a', \dots)(x', y', z')^2 \cos^2\Theta - \{a, a', \dots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2 = 0$$

schreiben, wo Θ eine Constante ist, oder auch

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2 (a, a', \dots)(x', y', z')^2 \sin^2\Theta$$
$$- (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(yz' - y'z, zx' - x'z, xy - x'y)^2 = 0,$$

wegen der Identität

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2 (a, a', \dots)(x', y', z')^2 - \{(a, a', \dots)(x', y', z')(x, y, z)\}^2$$
$$= (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)^2.$$

Aus den Liniencoordinaten der Achse der Einschreibung

*) Vergl. a. a. O. Art. 277 u. v. a.

**) Vergl. a. a. O. Art. 400.

$$\xi' = a x' + b'' y' + b' z', \quad \eta' = b'' x' + a' y' + b z', \quad \zeta' = b' x' + b y' + a'' z$$

folgt

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 = D\,(a, a', \dots)(x', y', z')^2,$$

und damit also die Form

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2\,(a, a', \dots)(x', y', z')^2 \cos^2\Theta$$
$$- \{(a, a', \dots)(x', y', z')(x, y, z)\}^2 = 0$$

mit der ursprünglichen Form

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2 + k\,(\xi' x + \eta' y + \zeta' z)^2 = 0$$

oder mit

$$(a, a', \dots)(x, y, z)^2 + k\,\{(a, a', \dots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2 = 0$$

identisch werde, muss

$$k = \frac{-1}{(a, a', \dots)(x', y', z')^2 \cos^2\Theta}$$

oder, was dasselbe ist,

$$= \frac{-D}{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \cos^2\Theta}$$

sein, d. i. man muss haben

$$D + k\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 - k\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \sin^2\Theta = 0.$$

Somit ist die Gruppe der entsprechenden doppelten Formen der Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts in Punkt- und respective Liniencoordinaten

$$(a, \dots)(x, y, z)^2 (a, \dots)(x', y', z')^2 \cos^2\Theta - \{(a, \dots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2 = 0,$$

und

$$(a, \dots)(x, y, z)^2 (a, \dots)(x', y', z')^2 \sin^2\Theta - (\mathfrak{A}, \dots)(y z' - y' z, z x' - z' x, x y' - x' y)^2 = 0;$$

$$(\mathfrak{A}, \dots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \sin^2\Theta - \{(\mathfrak{A}, \dots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2 = 0,$$

und

$$(\mathfrak{A}, \dots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \cos^2\Theta - D (a, \dots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta, \zeta\xi' - \zeta'\xi, \xi\eta' - \xi'\eta)^2 = 0.$$

Die erste und zweite und respective die dritte und vierte sind identisch in Folge der vorerwähnten respectiven Identitäten

$$(a, \dots)(x, y, z)^2 (a, \dots)(x', y', z')^2 - \{(a, \dots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2$$
$$= (\mathfrak{A}, \dots)(y z' - y' z,\ z x' - z' x,\ x y' - x' y)^2,$$
$$(\mathfrak{A}, \dots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \dots)(\xi', \eta', \zeta')^2 - \{(\mathfrak{A}, \dots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2$$
$$= D\,(a, \dots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta,\ \zeta\xi' - \zeta'\xi,\ \xi\eta' - \xi'\eta)^2.$$

Mit Hilfe der zu den früheren analogen Abkürzungen

$$(a, \dots)(x, y, z)^2 = 00,$$
$$(a, \dots)(x, y, z)(x', y', z') = 01 = 10, \text{ etc.}$$

erhält man die Identität

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix}^2,$$

und wenn die drei Punkte (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') in gerader Linie sind, durch das Verschwinden der rechtsstehenden Determinante

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = 0,$$

welche wieder in der Form

$$\cos^{-1}\frac{01}{\sqrt{00}\sqrt{11}} + \cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{22}} = \cos^{-1}\frac{02}{\sqrt{00}\sqrt{22}}$$

geschrieben werden kann und mit der Theorie der Distanz in nächster Verbindung steht.

Man denke einen Kegelschnitt, also innerhalb eines ebenen Systems ein Elementargebilde zweiter Stufe, als fest und unabhängig, d. i. als absolut; so bestimmt jedes Gebilde erster Stufe mit demselben ein Paar von Elementen, welches für diess Gebilde das absolute Paar der vorigen Entwickelung ist. Nämlich eine geradlinige Punktreihe das Paar der zwischen ihr und dem Kegelschnitt gemeinsamen Punkte, ein Strahlbüschel das Paar der ihm mit dem Kegelschnitt gemeinschaftlichen Strahlen; jenes Punktepaar ist das absolute der Reihe, diess Strahlenpaar das absolute des Büschels. Speciell für die Tangenten dieses absoluten Kegelschnitts als Träger von Punktreihen ist das absolute Elementenpaar ein Paar zusammenfallender Punkte, der Berührungspunkt mit dem absoluten Kegelschnitt; und für die Punkte des absoluten Kegelschnitts als Träger von Strahlbüscheln ist es ein Paar zusammenfallender Strahlen, die Tangente des absoluten Kegelschnitts. Wenn die frühere Entwickelung die Theorie der Entfernungen in Bezug auf jedes beliebige unter diesen Gebilden erster Stufe begründet hat, so erfordert die Begründung der Relation der Entfernungen von einem solchen Gebilde zum andern nur die Voraussetzung, dass die Einheit der Distanz für alle diese einzelnen Gebilde, der Quadrant, in

allen dieselbe Grösse sei; eine Voraussetzung, die bereits stillschweigend gemacht worden ist, wenn man die Bezeichnung des Quadranten durch das Symbol $\frac{\pi}{2}$ festhält, die aber ohne diess Symbol allerdings des besonderen Ausdrucks bedarf, weil die Bestimmung, dass rectanguläre Elemente zu dem absoluten Paar conjugiert harmonisch sind, allein jene Gleichheit nicht enthält. Mit derselben aber erlaubt die vorige Theorie die Vergleichung der Distanzen ebensowohl zwischen den Elementen verschiedener Gebilde erster Stufe, als zwischen den Elementen desselben Gebildes.

Wenn man den Pol einer Geraden in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt den Pol kurzweg und die Polare eines Punktes in Beziehung auf denselben die Polare kurzweg nennt, so gilt das Gesetz, dass die Distanz zweier Punkte oder Linien gleich der ihrer Polaren oder Pole ist, oder auch, dass die Distanz zweier Pole und die der entsprechenden Polaren einander gleich sind. Als Definition für den Begriff der Entfernung eines Punktes von einer Geraden dient dann die Festsetzung, dass sie das Complement der Distanz der Polare des Punktes von der Geraden oder das Complement der Distanz des Punktes vom Pol der Geraden ist. Dann ist die Distanz des Pols und seiner Polare das Complement von Null, d. h. der Quadrant. Man kann mittelst des absoluten Kegelschnitts jede geradlinige Punktereihe und jedes punktförmige Strahlbüschel in eine unendliche Reihe unendlich kleiner Elemente theilen, welche nach der Definition der Distanz einander gleich sind; die Zahl solcher Elemente zwischen zwei Punkten einer Reihe oder zwei Strahlen eines Büschels misst die Distanz zwischen diesen Punkten oder diesen Linien. Mittelst des Quadranten als einer Distanz, die sowohl in Bezug auf Linien als in Bezug auf Punkte existiert, ist man im Stande, die Distanz zweier Linien mit der zweier Punkte zu vergleichen. Die Distanz eines Punktes von einer Linie kann ebensowohl als Distanz zweier Punkte, wie auch als Distanz zweier Linien dargestellt werden.

Die Einführung des Kreises leitet dann sofort zur analytischen Darstellung dieser Begriffe. Ein in den absoluten Kegelschnitt eingeschriebener Kegelschnitt heisse ein Kreis, das Centrum und die Achse der Einschreibung seien als Centrum und Achse des Kreises bezeichnet. Dann sind alle Punkte des Kreises gleichweit entfernt vom Centrum und alle Tangenten desselben gleichweit entfernt von der Achse und diese Entfernung ist das Complement von jener.

Ist nun

$$(a, a', a'', b, b', b'' \between x, y, z)^2 = 0$$

die Gleichung des absoluten Kegelschnitts in Punktcoordinaten, also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \between \xi, \eta, \zeta)^2 = 0$$

seine Gleichung in Liniencoordinaten, so wird die Punktgleichung des Kreises vom Centrum (x', y', z')

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 \cos^2 \Theta - \{(a, \ldots \between x, y, z \between x', y', z')\}^2 = 0$$

oder

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 \sin^2 \Theta$$
$$- (\mathfrak{A}, \ldots \between yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)^2 = 0,$$

und durch dasselbe Raisonnement wie in dem Falle der Geometrie der Elementargebilde erster Stufe erkennt man, dass die Distanz der Punkte (x, y, z), (x', y', z') durch

$$\cos^{-1} \frac{(a, \ldots \between x, y, z \between x', y', z')}{\sqrt{(a, \ldots \between x, y, z)^2} \sqrt{(a, \ldots \between x', y', z')^2}}$$

oder durch

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{(\mathfrak{A}, \ldots \between yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)^2}}{\sqrt{(a, \ldots \between x, y, z)^2} \sqrt{(a, \ldots \between x', y', z')^2}}$$

ausgedrückt wird; alsdann ist durch die früher begründete Relation

$$\cos^{-1} \frac{01}{\sqrt{00}\sqrt{11}} + \cos^{-1} \frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{22}} = \cos^{-1} \frac{02}{\sqrt{00}\sqrt{22}}$$

für drei Punkte derselben geraden Linie P, P', P'' die fundamentale Gleichung

$$Dist.\,(P, P') + Dist.\,(P', P'') = Dist.\,(P, P'')$$

wieder erfüllt.

In gleicher Weise ist die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten für (ξ', η', ξ') als Achse der Einschreibung
$$(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)^2(\mathfrak{A},\ldots)(\xi',\eta',\zeta')^2 \sin^2\Theta - \{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)(\xi',\eta',\zeta')\}^2 = 0$$
oder
$$(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)^2(\mathfrak{A},\ldots)(\xi',\eta',\zeta')^2 \cos^2\Theta$$
$$- D(a,\ldots)(\eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2 = 0$$
und folgt daraus für die Distanze der Linien (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ')
$$\cos^{-1}\frac{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)(\xi',\eta',\zeta')}{\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi',\eta',\zeta')^2}}$$
oder das Gleichbedeutende
$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{D(a,\ldots)(\eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2}}{\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi,\eta,\zeta)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi',\eta',\zeta')^2}}.$$
Aus der ersten Formel jeder Reihe leitet man endlich für die Distanz eines Punktes (x, y, z) von der Linie (ξ', η', ζ') den Ausdruck ab
$$\sin^{-1}\frac{(\xi' x + \eta' y + \zeta' z)\sqrt{D}}{\sqrt{(a,\ldots)(x,y,z)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots)(\xi',\eta',\zeta')^2}},$$
indem man entweder für x', y', z'
$$\mathfrak{A}\xi' + \mathfrak{B}''\eta' + \mathfrak{B}'\zeta', \text{ etc.}$$
oder für ξ, η, ζ die entsprechenden
$$ax + b''y + b'z, \text{ etc.}$$
und für $\cos^{-1}$ immer $\sin^{-1}$ einführt.

Man kann annehmen — und es ist das der Fall ebener Systeme, — dass der absolute Kegelschnitt in ein Paar von Punkten degeneriere; alsdann ist ihre Verbindungslinie eine absolute Gerade, die als doppelt anzusehen ist. Jeder Punkt bestimmt alsdann mit dem absoluten Paar zwei gerade Linien, welche in Bezug auf ihn als Träger eines Strahlbüschels das absolute Elementenpaar bilden. Die Theorie der Distanzen von Strahlen durch einen Punkt ist daher genau dieselbe, wie die im allgemeinen Falle dargelegte.

Aber eine beliebige Gerade hat mit der absoluten Linie ein Paar zusammenfallender Punkte gemein, und wenn also eine solche Gerade als Träger einer Punktreihe betrachtet wird, so ist die Theorie der Distanz für die Punkte derselben nicht die allge-

meine Theorie, sondern es wenden sich die Formeln auf dieselbe an, welche für den speciellen Fall vorher entwickelt wurden, wo das absolute Paar von Elementen in ein Doppelelement zusammenfällt. Man kann nicht ebenso wie vorher die Distanzen von Punkten in verschiedenen Linien vergleichen, weil der Quadrant als eine Einheit der Distanz in diesem Falle nicht existiert. Die Distanz zweier Punkte kann mit der Distanz zweier Linien in keiner Weise verglichen werden; die Distanz eines Punktes von einer Linie kann nur als Entfernung zweier Punkte bestimmt werden. Die Vergleichung muss mit Hilfe des Kreises vollzogen werden, eines Kegelschnitts nämlich, welcher durch die zwei Punkte geht, die den absoluten Kegelschnitt repräsentieren; der Durchschnittspunkt der Tangenten des Kreises in denselben, oder der in Bezug auf ihn genommene Pol der absoluten Linie ist das Centrum und die absolute Linie selbst die Achse der Einschreibung des Kreises. Durch die vorausgesetzte Eigenschaft des Kreises nun, nach welcher alle seine Punkte gleichweit vom Centrum entfernt sind, wird man in den Stand gesetzt, Distanzen in verschiedenen Linien zu vergleichen. Die Construction des Euklid, um durch einen Punkt A eine Linie AD von gleicher Länge mit der gegebenen begrenzten Linie BC zu ziehen, nach welcher man die gerade Linie AB zieht, über ihr das gleichseitige Dreieck ABD construiert, dessen Seiten DA und DB über A und B hinaus nach E und F verlängert, um nun von B aus mit dem Halbmesser BC diese Länge in BG auf BF und darnach von D aus die Länge DG auf DE in DL zu tragen, so dass $AL = BC$ ist — diese Construction gilt nach den hier gemachten Voraussetzungen und erlaubt, die begrenzte Linie AD gleich der gegebenen begrenzten Linie BC zu machen.

Wegen der Unbestimmtheit der Längeneinheit für die Punkte der Linie ist aber eine Vergleichung der Distanzen von Punkten mit den Distanzen von Linien nicht möglich.

Die Distanz eines Punktes von einer Linie kann dagegen mit der Distanz zweier Punkte verglichen werden, wenn man als eine Definition der ersteren Distanz

feststellt, dass sie die Distanz des Punktes von dem Punkte der Linie sei, in welchem dieselbe von der zu ihr rectangulären Linie geschnitten wird, welche durch den Punkt geht.

Sind allgemein (p, q, r) und (p_0, q_0, r_0) die Coordinaten der zwei Punkte, in welche der absolute Kegelschnitt degeneriert gedacht ist, so ist die Gleichung dieses letzteren in Liniencoordinaten

$$2(p\xi + q\eta + r\zeta)(p_0\xi + q_0\eta + r_0\zeta) = 0;$$

also ist

$$\mathfrak{A} = 2pp_0, \quad \mathfrak{A}' = 2qq_0, \quad \mathfrak{A}'' = 2rr_0,$$
$$\mathfrak{B} = qr_0 + q_0r, \quad \mathfrak{B}' = rp_0 + r_0p, \quad \mathfrak{B}'' = pq_0 + p_0q;$$

es ist ferner

$$D = 0$$

und

$$D(a, a, a'', b, b', b'')(x, y, z)^2 = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der absoluten Linie.

Der Ausdruck für die Distanz der zwei Punkte (x, y, z), (x', y', z') ist als Bogen eines verschwindenden sinus gegeben; indem man den Bogen auf seinen sinus reduciert und den verschwindenden Factor unterdrückt, resultiert der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\left\{2 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ p, & q, & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}\right\}}}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}}$$

Der Ausdruck für die Distanz der beiden Geraden (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') ist

$$\cos^{-1} \frac{(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')+(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}{\sqrt{2(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}\sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}}$$

oder auch

$$\sin^{-1}\frac{(qr_0-q_0r)(\eta\zeta'-\eta'\zeta)+(rp_0-r_0p)(\zeta\xi'-\zeta'\xi)+(pq_0-p_0q)(\xi\eta'-\xi'\eta)}{\sqrt{2(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}\sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}}.$$

Man findet endlich den Ausdruck der Distanz des Punktes (x, y, z) von der Linie (ξ', η', ζ'), indem man den Bogen auf seinen sinus reduciert und den verschwindenden Factor unterdrückt,

$$\frac{\xi'x+\eta'y+\zeta'z}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}\sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}}.$$

Durch die specielle Annahme

$$p=1,\ q=i,\ r=0;\ p_0=1,\ q_0=-i,\ r_0=0\quad (i=\sqrt{-1})$$

wird die Gleichung des absoluten Kegelschnitts in Linien coordinaten

$$\xi^2+\eta^2=0,$$

oder was dasselbe ist, der absolute Kegelschnitt wird von den zwei Punkten gebildet, in welchen die Linie

$$z=0$$

das Linienpaar

$$x^2+y^2=0$$

durchschneidet, welches Letztere, als durch die Punkte des absoluten Kegelschnitts gehend, nach der Definition ein Kreis ist, nämlich ein Kreis vom Radius Null, ein unendlich kleiner Kreis.

Wenn die Coordinate $z=1$ gesetzt wird, so bestimmt die vorhergehende Festsetzung über die Coordinaten der Punkte des absoluten Kegelschnitts die Proportionen

$$x:y:1=1:\ \ i:0,$$
$$x:y:1=1:-i:0;$$

d. h. die Werthe von x und y sind unendlich und erfüllen die Bedingung

$$x^2+y^2=0,$$

oder der absolute Kegelschnitt besteht aus den Punkten, in welchen die unendlich entfernte gerade Linie von dem unendlich kleinen Kreise

$$x^2 + y^2 = 0$$

geschnitten wird, den imaginären unendlich entfernten Kreispunkten.

Dann specialisieren sich die allgemeineren Formeln des Vorigen in folgender Weise.

Die Distanz der Punkte (x, y) und (x', y') ist

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2};$$

die Distanz der Linien (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') ist

$$\cos^{-1} \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}$$

oder

$$\sin^{-1} \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}},$$

welches auch geschrieben werden kann

$$= \tan^{-1} \frac{\xi}{\eta} - \tan^{-1} \frac{\xi'}{\eta'}.$$

Der Ausdruck der Entfernung des Punktes (x, y) von der Linie (ξ', η', ζ') wird endlich

$$\frac{\xi' x + \eta' y + \zeta'^2}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}};$$

man erhält also die Formeln der analytischen Planimetrie für rectanguläre Coordinaten x, y wieder.

Die allgemeinen Formeln erfahren keine wesentliche Veränderung, sie vereinfachen sich aber sehr, wenn man für die Gleichung des absoluten Kegelschnitts in Punktcoordinaten

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, in Liniencoordinaten

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

wählt. Man erhält dann nämlich für die Distanz der Punkte (x, y, z) (x', y', z') den Ausdruck

$$\cos^{-1} \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

für die Distanz der Linien (ξ, η, ξ), $\xi', \eta', \zeta')$ den analogen

$$\cos^{-1} \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}},$$

und für die des Punktes (x, y, z) von der Linie (ξ', η', ζ')

$$\sin^{-1}\frac{\xi' x + \eta' y + \zeta' z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}}.$$

Wenn endlich (x, y, z) rectanguläre Punktcoordinaten im Raum sind, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

genügen, so liegt der Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche einer Kugel und indem die letzterwähnten Gleichungen Geltung behalten, hat man zu beachten, dass

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

einen grössten Kreis der Kugel darstellt; man darf, weil nur die Verhältnisse von ξ, η, ζ in die Formeln eingehen, auch

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

setzen. Dann gelten die Formeln für ein System sphärischer Geometrie; der absolute Kegelschnitt ist der sphärische Kegelschnitt, in welchem die Kugel von dem concentrischen Kegel oder der concentrischen verschwindenden Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

geschnitten wird. Durch diesen Umstand unterscheidet sich die Geometrie der Kugel von der der Ebene; der absolute Kegelschnitt ist bei ihr ein wirklicher Kegelschnitt, für die Geometrie der Ebene degeneriert er in ein Punktepaar und die Theorie der Distanz ist nicht die allgemeine in allen ihren Theilen. Darum ist die Dualität der Theoreme eine vollständige für die Geometrie der Kugel und eine von vielen Besonderheiten gestörte und complicierte für die der Ebene.

So entspringt die Geometrie des Maasses als ein Theil der allgemeinen Lehre, die man als die descriptive Geometrie bezeichnen darf, wenn man von der engeren Beziehung dieses Ausdrucks auf die sichtbare Darstellung einen Augenblick absieht; die Theorie eines geometrischen Systems wird zur Lehre von den metrischen Relationen innerhalb desselben, wenn man einen Kegelschnitt des Systems als Einheit und Maass für alle räumlichen Verhältnisse unter seinen

Bestandtheilen auffasst und ihn als unabhängig, als absolut bezeichnet.

Man sieht, die Theorie der metrischen Relationen erfordert, um vollständig nach ihren Grundbegriffen dargelegt zu werden, die Betrachtung zusammengesetzter Gebilde, mindestens der der zweiten Stufe. Auf die letzteren sollte an dieser Stelle eben nur in dieser einen Beziehung eingegangen werden.

Druckfehler-Verzeichniss.

Pag.	12,	Zeile	4	von oben	, statt ;.
-	53,	-	16	und 17 von unten	sind die Kommata zu streichen.
-	112,	-	21	von unten	Determinanten statt Determinante.
-	128,	-	5	- -	a_n' statt α_n'.
-	135,	-	10	- oben	Re- statt Re.
-	161,	-	13	- -	$(a_0 a_2 - a_1^2)^4$ statt $(a_0 a_2 - a_1^2)^3$.
-	175,	-	19	- -	$a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots$ statt $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$
-	182,	-	4	- -	$6 F a_2 a_5$ statt $6 F a_5^2$.
-	183,	-	4	- unten	0 statt 1.
-	184,	-	6	- -	$\frac{dC}{dc_i}$ statt $\frac{dC}{dc}$.
-	189,	-	9	und 18 von oben	s_1 statt s.
		-	12	von oben	$c_{n'}$ statt c.
-	194,	-	2	- unten	$\sum_1^m {}_i$ statt $\sum_1^m {}_j$.
-	195,	-	4	- oben	der statt oder.
-	202,	-	11	- unten	$a_3 y^3$ statt $a_0 y^3$.
-	204,	-	10	- oben	$-18 a_0^2 \dots$ statt $+18 a_0^2 \dots$
-	209,	-	4	- -	$(x - \alpha_3 y)^2$ statt $(x - \alpha_1 y)^2$.
-	210,	-	18	- unten	-10 statt $+10$.
-	216,	-	16	- -	$(\alpha_3 - \alpha_1)^2$ statt $(\alpha_3 - \alpha_1^2)$.
-	217,	-	10	- -	$(x, y)^2$ statt (x, y).
-	218,	-	2	- -	$\sqrt{22}$ statt $\sqrt{12}$.
-	224,	-	16	- oben	(ξ, η, ζ) statt $(\xi, \eta, \xi)^2$.
		-	6	- unten	$zx' - z'x, xy' - x'y$ statt $zx' - x'z, xy - x'y$.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.




Gebunden von
C. W. Frei
in Göttinger